超幾何級数 I

@nkswtr

はじめに

この PDF は超幾何級数について書いたものであるが、超幾何関数の理論的なことを除いて書いたので、前提知識はあまり必要ない。具体的には、微積分ができれば十分であり、複素解析の知識は仮定しない。また級数の変形に慣れているとよい。理解を助けるため、あまり計算を省略せずに、できるだけ特殊値などの具体例を多くした。また、n は自然数を表すものと約束する。

目次

第 1 章

特殊関数

超幾何級数を扱う上で、まずは特殊関数のことを知っておいた方が良い。ここでは、主にガンマ関数について解説し、その他の重要な関数について少しずつ解説する。

1.1　ガンマ関数

定義 1.1. ガンマ関数を次で定義する。

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}$$

これをオイラーの乗積表示という。
ここで、定義に従って $\Gamma(1)$ の値を求めてみる。

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{nn!}{\prod_{k=0}^{n}(1+k)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{nn!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= 1\end{aligned}$$

定理 1.1.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

証明.

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{z+1} n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+1+k)} \\ &= z \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+z+1} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)} \\ &= z \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)} \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

□

系 1.1.

$$\Gamma(n+1) = n!$$

証明. 前の定理と、$\Gamma(1) = 1$ から分かる。 □

これより、ガンマ関数が階乗の一般化になっていることが分かる。
ガンマ関数と同様に重要なベータ関数を定義する。

定義 1.2. ベータ関数を次で定義する

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

この積分を第 1 種 Euler 積分という。

定理 1.2.

$$\mathrm{B}(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} x \cos^{2b-1} x\,dx$$

証明. $x \mapsto \sin^2 x$ と置換すればよい。 □

定理 1.3.

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a+1,b-1), \quad a,b>1$$

証明. 部分積分すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(a,b) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \\
&= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a}(1-x)^{b-2}\,dx \\
&= \frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a+1,b-1)
\end{aligned}$$

□

補題 1.1.

$$\mathrm{B}(a,n+1) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(a+k)}$$

証明. 定理 1.3 を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(a,n+1) &= \frac{n(n-1)\cdots 1}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}\mathrm{B}(a+n,1) \\
&= \frac{n(n-1)\cdots 1}{a(a+1)\cdots(a+n-1)(a+n)} \\
&= \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(a+k)}
\end{aligned}$$

□

定理 1.4. 第 2 種 Euler 積分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx, \quad Re(z) > 0$$

証明. 前の補題より、

$$\begin{aligned}\frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)} &= n^z \mathrm{B}(z,n+1) \\ &= n^z \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n\,dx, \qquad x \to \frac{x}{n} \\ &= \int_0^n x^{z-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx\end{aligned}$$

ここで、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

は閉区間 $[0,n]$ 上で、一様収束であるから、

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)} = \lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{z-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx$$

□

定理 1.5. Weierstrass の乗積表示

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

ここで、γ は Euler の定数で、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$$

証明.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}{n^z n!} \\ &= z\lim_{n\to\infty} n^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) \\ &= z\lim_{n\to\infty} e^{z(-\ln n+\sum_{k=1}^{n}1/k)}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \\ &= ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\end{aligned}$$

□

定理 1.6. ガンマ関数の相反公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

証明. 三角関数の乗積展開

$$\sin\pi z = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

を用いる。Weierstrass の乗積表示より、

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= -z\Gamma(z)\Gamma(-z) \\
&= -z\left(ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/k}\right)^{-1}\left(-ze^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/k}\right)^{-1} \\
&= \left(z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{\sin\pi z}{\pi}\right)^{-1} \\
&= \frac{\pi}{\sin\pi z}
\end{aligned}
$$

□

これは特殊値の計算、極限の計算によく使える。

系 1.2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

証明.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$$

□

次はよく使うので、覚えておくと良い。

系 1.3.

$$\lim_{x\to -2n}\frac{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(1+x)} = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(1+x)} &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(x)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}\frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\frac{\pi}{\sin(\pi x/2)}}{\frac{\pi}{\sin\pi x}}\frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\pi x}{2\sin\frac{\pi x}{2}}\frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)} \\
&= \cos\frac{\pi x}{2}\frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -2n}\frac{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(1+x)} &= \lim_{x\to -2n}\cos\frac{\pi x}{2}\frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}\\
&= (-1)^n\frac{\Gamma(1+2n)}{\Gamma(1+n)}\\
&= (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}
\end{aligned}
$$

□

定理 1.7.

$$
\mathrm{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx\cdot\int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}\,dydx, \qquad x+y\mapsto t\\
&= \int_0^\infty\int_x^\infty x^{a-1}(t-x)^{b-1}e^{-t}\,dtdx\\
&= \int_0^\infty\int_0^t x^{a-1}(t-x)^{b-1}e^{-t}\,dxdt, \qquad x\mapsto tx\\
&= \int_0^\infty\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}t^{a+b-1}e^{-t}\,dxdt\\
&= \int_0^\infty t^{a+b-1}e^{-t}\,dt\cdot\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\\
&= \Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)
\end{aligned}
$$

□

次の公式も相反公式と同様に重要である。

定理 1.8. Legendre の倍角公式

$$
\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)
$$

証明.

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} &= \mathrm{B}(z,z) \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1} x \cos^{2z-1} x \, dx \\
&= 2^{1-2z} \cdot 2\int_0^{\pi/2} (2\sin x \cos x)^{2z-1} \, dx \\
&= 2^{1-2z} \cdot 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1} 2x \, dx \\
&= 2^{1-2z} \int_0^{\pi} \sin^{2z-1} x \, dx \\
&= 2^{1-2z} \cdot 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1} x \, dx \\
&= 2^{1-2z} \mathrm{B}\left(z, \frac{1}{2}\right) \\
&= 2^{1-2z} \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

これを、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を用いて整理すると、

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

□

以下は証明は、Euler-Maclaurin の和公式を知らなければ、読み飛ばしても問題ない。

定理 1.9. $\ln\Gamma(z)$ の漸近展開

$$\ln\Gamma(z) = \frac{\ln 2\pi}{2} + \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)(2k-1)z^{2k-1}} + O(z^{-2m})$$

証明.

$$\begin{aligned}
\ln\Gamma(z) &= \ln(z-1)\Gamma(z-1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{(z-1)n^{z-1}n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} (z-1)\ln n + \sum_{k=1}^{n}(\ln k - \ln(z+k-1))
\end{aligned}$$

ここで、

$$f(x) = \ln x - \ln(z+x-1)$$

として、Euler-Maclaurin の和公式を適用すると、

$$\begin{aligned}
\ln\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}(z-1)\ln n + \int_1^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\bigl(f(n)+f(1)\bigr) \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1)\right) + \int_1^n \frac{B_{2m+1}(x-\lfloor x\rfloor)}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}(z-1)\ln n + \Bigl[x\ln x - (z+x-1)\ln(z+x-1)\Bigr]_1^n - \frac{1}{2}\log z \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)(2k-1)}\left(\frac{1}{n^{2k-1}} - \frac{1}{(z+n-1)^{2k-1}} - 1 + \frac{1}{z^{2k-1}}\right) \\
&\quad + \int_1^n \frac{B_{2m+1}(x-\lfloor x\rfloor)}{2m+1}\left(\frac{1}{x^{2m+1}} - \frac{1}{(z+x-1)^{2m+1}}\right)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}(n+z-1)\bigl(\ln n - \ln(z+n-1)\bigr) + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)(2k-1)}\left(1-\frac{1}{z^{2k-1}}\right) \\
&\quad + \int_1^n \frac{B_{2m+1}(x-\lfloor x\rfloor)}{2m+1}\left(\frac{1}{x^{2m+1}} - \frac{1}{(z+x-1)^{2m+1}}\right)dx \\
&= 1 - z + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)(2k-1)}\left(1-\frac{1}{z^{2k-1}}\right) \\
&\quad + \int_1^\infty \frac{B_{2m+1}(x-\lfloor x\rfloor)}{2m+1}\left(\frac{1}{x^{2m+1}} - \frac{1}{(z+x-1)^{2m+1}}\right)dx
\end{aligned}$$

ここで、定数項を C とおくと、

$$\begin{aligned}
\ln\Gamma(z) &= C + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)(2k-1)z^{2k-1}} - R_{2m+1}(z) \\
R_{2m+1}(z) &= \frac{1}{2m+1}\int_1^\infty \frac{B_{2m+1}(x-\lfloor x\rfloor)}{(z+x-1)^{2m+1}}dx
\end{aligned}$$

ここで、$B_{2m+1}(x-\lfloor x\rfloor)$ は有界であるから、ある定数 M があって、$|B_{2m+1}(x-\lfloor x\rfloor)| \leq M$
よって、剰余項は、

$$R_{2m+1}(z) \leq \frac{M}{2m+1}\int_1^\infty \frac{dx}{|x+z-1|^{2m+1}} = O(z^{-2m-1})$$

よって、特に、

$$\ln\Gamma(z) = C + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + O(z^{-1})$$

Legendre の倍角公式より、

$$\begin{aligned}
\ln\Gamma(z) + \ln\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) &= (1-2z)\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\pi + \ln\Gamma(2z) \\
C + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + z\ln\left(z+\frac{1}{2}\right) - 2z - \frac{1}{2} &= (1-2z)\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\pi + \left(2z-\frac{1}{2}\right)\ln 2z - 2z + O(z^{-1}) \\
C + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + z\ln\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} + (1-2z)\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\pi + \left(2z-\frac{1}{2}\right)\ln 2z + O(z^{-1}) \\
C + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + z\ln\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(2z-\frac{1}{2}\right)\ln z + O(z^{-1}) \\
C + z\ln\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\pi + z\ln z + O(z^{-1}) \\
C &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\pi - z\ln\left(1+\frac{1}{2z}\right) + O(z^{-1})
\end{aligned}$$

ここで、$z \to \infty$ とすることにより、$C = \frac{1}{2}\ln 2\pi$ を得る。 □

定理 1.10. Stirling の公式

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}z^{z-1/2}e^{-z}} = 1$$

証明. 定理 1.9 より、

$$\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}z^{z-1/2}e^{-z}} = \exp(O(z^{-1}))$$

$z \to \infty$ とすればよい。 □

定理 1.11.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

ならば、

$$\lim_{z\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(z+a_k)}{\Gamma(z+b_k)} = 1$$

証明. Stirling の公式より、

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(z+a_k)}{\Gamma(z+b_k)} &= \lim_{z\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2\pi}(z+a_k)^{z+a_k-1/2}e^{-z-a_k}}{\sqrt{2\pi}(z+b_k)^{z+b_k-1/2}e^{-z-b_k}} \\
&= \lim_{z\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(z+a_k)^{z+a_k-1/2}}{(z+b_k)^{z+b_k-1/2}}\prod_{k=1}^{n}e^{b_k-a_k} \\
&= \lim_{z\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(1+\frac{a_k}{z}\right)^{z+a_k-1/2}}{\left(1+\frac{b_k}{z}\right)^{z+b_k-1/2}}\prod_{k=1}^{n}(ze)^{b_k-a_k} \\
&= \lim_{z\to\infty}\prod_{k=1}^{n}z^{b_k-a_k} \\
&= \lim_{z\to\infty}z^{\sum_{k=1}^{n}b_k-a_k} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

次の公式は、Legendre の倍角公式の一般化である。

定理 1.12. Gauss の乗法公式

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2-nz} \Gamma(nz)$$

証明.

$$f(z) = \frac{n^{nz} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma(nz)}$$

とする。

$$f(z) = (2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{n}$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}
f(z+1) &= \frac{n^{nz+n} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+1+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma(nz+n)} \\
&= \frac{n^n z\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{nz(nz+1)\cdots(nz+n-1)} \frac{n^{nz} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma(nz)} \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

よって、

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z+n)$$

ここで、Stirling の公式より、

$$\begin{aligned}
f(z) &= \lim_{z\to\infty} f(z) \\
&= \lim_{z\to\infty} \frac{n^{nz} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma(nz)} \\
&= \lim_{z\to\infty} \frac{n^{nz} \prod_{k=0}^{n-1} \sqrt{2\pi}\left(z+\frac{k}{n}\right)^{z+k/n-1/2} e^{-(z+k/n)}}{\sqrt{2\pi}(nz)^{nz-1/2}e^{-nz}} \\
&= \lim_{z\to\infty} (2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{nz}z^{-nz} \prod_{k=0}^{n-1}\left(z+\frac{k}{n}\right)^{z+k/n-1/2} e^{-k/n} \\
&= \lim_{z\to\infty} (2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{nz}z^{-1/2} \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{nz}\right)^{z+k/n-1/2} e^{-k/n} \\
&= (2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{n} \prod_{k=1}^{n-1} e^{k/n}e^{-k/n} \\
&= (2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{n}
\end{aligned}$$

□

1.2 ディガンマ関数

ディガンマ関数は級数の値を表す上で重要である。

定義 1.3. ディガンマ関数を以下で定義する。

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

これはガンマ関数を対数微分したものになっている。

定義 1.4. z に対して、調和数を以下で定義する。

$$H_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}$$

定理 1.13.

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

証明.

$$\begin{aligned}
H_n &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+k} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n+k} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{1}{k} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} + \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

□

これを n 番目の調和数という。

定理 1.14.

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

証明.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

を対数微分すれば、得られる。 □

定理 1.15.

$$\psi(z+1) = H_z - \gamma$$

証明. Weierstrass の乗積表示より、

$$-\ln\Gamma(z) = \ln\left(ze^{\gamma z}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right)$$
$$-\ln\Gamma(z) = \ln z + \gamma z + \sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}$$

両辺を微分して、

$$\begin{aligned}
-\psi(z) &= \frac{1}{z} + \gamma - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \\
-\psi(z) &= \frac{1}{z} + \gamma - H_z \\
\psi(z) + \frac{1}{z} &= H_z - \gamma \\
\psi(z+1) &= H_z - \gamma
\end{aligned}$$

□

これより、$\psi(1) = -\gamma$ が分かる。

定理 1.16. ディガンマ関数の相反公式

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi\cot\pi z$$

証明. ガンマ関数の相反公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

を対数微分すれば、得られる。 □

定理 1.17.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\psi\left(z+\frac{k}{n}\right) = n(\psi(nz) - \ln n)$$

証明. Gauss の乗法公式

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2}n^{1/2-nz}\Gamma(nz)$$

を対数微分すれば、得られる。 □

系 1.4.

$$\psi(z) + \psi\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2\psi(2z) - 2\ln 2$$

証明. 定理 1.17 で $n = 2$ とすればよい。 □

系 1.5.

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2$$

証明. 系 1.4 で、$z = \frac{1}{2}$ とすれば、

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi(1) &= 2\psi(1) - 2\ln 2 \\
\psi\left(\frac{1}{2}\right) &= \psi(1) - 2\ln 2 \\
\psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - 2\ln 2
\end{aligned}$$

□

定義 1.5. ディガンマ関数を n 回微分したもの、

$$\psi^{(n)}(z)$$

をポリガンマ関数という。

1.3 ゼータ関数

ゼータ関数は重要な関数で、特殊値の公式も存在するが、ここでは述べない。

定義 1.6. Riemann ゼータ関数を次で定義する

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad Re(s) > 1$$

定理 1.18.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = (1 - 2^{-s})\zeta(s)$$

証明.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\
&= (1 - 2^{-s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\
&= (1 - 2^{-s})\zeta(s)
\end{aligned}$$

□

定理 1.19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

証明.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\
&= (1 - 2^{-s})\zeta(s) - 2^{-s}\zeta(s) \\
&= (1 - 2 \cdot 2^{-s})\zeta(s) \\
&= (1 - 2^{1-s})\zeta(s)
\end{aligned}$$

□

定義 1.7. Dirichlet ベータ関数を次で定義する

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}, \qquad Re(s) > 0$$

系 1.6.

$$\beta(1) = \frac{\pi}{4}$$

証明.

$$\begin{aligned}\beta(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &= \arctan(1) \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

□

$\beta(2)$ をカタランの定数といい、G であらわすこともある。

定義 1.8. Hurwitz ゼータ関数を次で定義する

$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}, \qquad Re(s) > 1$$

ここで、

$$\zeta(s) = \zeta(s,1)$$

であるから、Hurwitz ゼータ関数は Riemann ゼータ関数の一般化になっている。

定理 1.20.

$$\zeta(s,x+1) = \zeta(s,x) - x^{-s}$$

証明.

$$\begin{aligned}\zeta(s,x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x+1)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s} - x^{-s} \\ &= \zeta(s,x) - x^{-s}\end{aligned}$$

□

定理 1.21. $n > 0$ のとき、

$$\psi^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} n! \zeta(n+1,z)$$

証明. 定理 1.15 より、

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} - \frac{1}{m+z-1}$$

両辺を n 回微分すると、

$$\psi^{(n)}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{(m+z-1)^{n+1}}$$

ここで、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{(m+z-1)^{n+1}} = (-1)^{n-1} n! \zeta(n+1, z)$$

だから、定理は示された。 □

よって、Hurwitz ゼータ関数は、ポリガンマ関数の一般化にもなっている。

1.4 超幾何関数の定義

定義 1.9. 二重階乗の定義
自然数 n に対して、

$$0!! = 1!! = 1, \quad n!! = n \cdot (n-2)!!$$

と定義する。この漸化式を用いて負の奇数について、

$$(-1)!! = 1, \quad (-3)!! = -1$$

のように二重階乗が定義できる。

上昇階乗冪、下降階乗冪は以下で定義される。

定義 1.10. n を自然数としたとき、a を底とする上昇 n 乗を

$$\prod_{k=0}^{n-1} (a+k) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$$

a を底とする下降 n 乗を

$$\prod_{k=0}^{n-1} (a-k) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$$

のように定義する。

下降階乗冪は差分学などで重要であるが、超幾何級数で用いるのは上昇階乗冪の方である。また、下降階乗冪は上昇階乗冪でかくこともできる。この上昇階乗冪の n を整数まで拡張したのが次のポッホハマー記号である。

定義 1.11. ポッホハマー記号を次で定義する

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k), \quad (a)_{-n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (a-k)}$$

ポッホハマー記号は特殊関数論では上昇階乗冪を表すが、組合せ論などでは、下降階乗冪を表す。ここで、

$$\begin{aligned}\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1) \\ &= (a+n-1)\cdots(a+1)a\Gamma(a) \\ &= (a)_n\Gamma(a)\end{aligned}$$

であるから、

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

つまり、ポッホハマー記号は、ガンマ関数の比で表される。ガンマ関数の積がポッホハマー記号で書けるときはそう書いた方が計算の見通しが良くなることが多い。

$$(a_1,\ldots,a_r)_n = (a_1)_n\cdots(a_r)_n$$

と略記する

定理 1.22.

$$(a)_n = (-1)^n(1-n-a)_n \tag{1.1}$$

$$(a)_{-n} = \frac{(-1)^n}{(1-a)_n} \tag{1.2}$$

$$(a)_{n-k} = \frac{(-1)^k(a)_n}{(1-n-a)_k} \tag{1.3}$$

$$(a)_{n+k} = (a)_n(a+n)_k \tag{1.4}$$

$$(a)_{2n} = 2^{2n}\left(\frac{a}{2}\right)_n\left(\frac{1+a}{2}\right)_n \tag{1.5}$$

$$\frac{(a+1)_n}{(a)_n} = \frac{a+n}{a} \tag{1.6}$$

$$(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} \tag{1.7}$$

証明. 最初の式のみ示す。簡単なので、残りは読者に任せる。

$$\begin{aligned}(a)_n &= a(a+1)\cdots(a+n-1) \\ &= (-1)^n(1-n-a)(2-n-a)\cdots(-1-a)(-a) \\ &= (-1)^n(1-n-a)_n\end{aligned}$$

□

最後の式より、二項係数は、

$$\binom{n}{k} = (-1)^k\frac{(-n)_k}{k!}$$

と表すことができる。また、

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

はよく使うので、重要である。二項係数を用いて、

$$\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

という形にもできる。

二重階乗を用いれば、

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

と表すことができる。

これらの式は、以降断りなく用いるので、考えずに変形できるようにしておくと良い。

また、ガンマ関数の Euler の乗積表示は、ポッホハマー記号を用いれば、

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{(z)_{n+1}}$$

と簡潔に表すことができる。次の式は極限を取るときに必要になる。

定理 1.23.

$$\sum_{k=1}^{r} a_k = \sum_{k=1}^{r} b_k$$

ならば、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_r)_n} = \prod_{k=1}^{r} \frac{\Gamma(b_k)}{\Gamma(a_k)}$$

証明. 定理 1.11 より、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_r)_n} &= \prod_{k=1}^{r} \frac{\Gamma(b_k)}{\Gamma(a_k)} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{\Gamma(a_k+n)}{\Gamma(b_k+n)} \\ &= \prod_{k=1}^{r} \frac{\Gamma(b_k)}{\Gamma(a_k)}\end{aligned}$$

□

本題の、超幾何級数を定義する。

定義 1.12. 超幾何関数の定義

$$_rF_s\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_r\\ b_1,b_2,\ldots,b_s\end{matrix};z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)_n n!} z^n$$

左辺の関数を超幾何関数、右辺の級数を超幾何級数という。一般化された超幾何関数ともいわれているが、この PDF では、単に超幾何級数ということが多い。$a_1, a_2, \ldots, a_r$ のどれか一つが負の整数の時、級数は有限和である。ここで、収束半径について考える。超幾何級数の第 n 項の係数を、

$$A_n = \frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)_n n!}$$

とおくと、d'Alembert の判定法より、収束半径 R は、

$$\begin{aligned}R &= \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A_{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(b_1+n)\cdots(b_s+n)(n+1)}{(a_1+n)\cdots(a_r+n)}\end{aligned}$$

よって、級数が有限和ではないとき、

$$R = \begin{cases} \infty & (r > s+1) \\ 1 & (r = s+1) \\ 0 & (r < s+1) \end{cases}$$

となる。

1.5 超幾何関数の例

以下、超幾何関数の例を挙げる。

定理 1.24.

$$e^x = {}_0F_0\left[\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}; x\right] \tag{1.8}$$

$$\sinh x = x\,{}_0F_1\left[\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; \frac{x^2}{4}\right] \tag{1.9}$$

$$\cosh x = {}_0F_1\left[\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{x^2}{4}\right] \tag{1.10}$$

$$\sin x = x\,{}_0F_1\left[\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; -\frac{x^2}{4}\right] \tag{1.11}$$

$$\cos x = {}_0F_1\left[\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; -\frac{x^2}{4}\right] \tag{1.12}$$

$$\ln(1+x) = x\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix}; -x\right] \tag{1.13}$$

$$\arcsin x = x\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; x^2\right] \tag{1.14}$$

$$\arctan x = x\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} 1, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; -x^2\right] \tag{1.15}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}; k^2\right] \tag{1.16}$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}; k^2\right] \tag{1.17}$$

ここで、$K(k)$ は第 1 種完全楕円積分、$E(k)$ は第 2 種完全楕円積分である。これらは、積分で定義されるが、詳しく扱わないので、ここでは上記の級数で定義されるものとする。

証明. 上記の関数の Maclaurin 展開を知っているなら、

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n n! = \frac{(2n)!}{2^{2n}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)_n n! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n}}$$

に注意すれば証明できるであろう。 □

ゼータ関数の特殊値は、以下のように表すことができる。

定理 1.25.

$$\zeta(n) = {}_{n+1}F_n \left[\begin{matrix} 1, 1, \ldots, 1 \\ 2, \ldots, 2 \end{matrix} ; 1 \right] \tag{1.18}$$

$$\beta(n) = {}_{n+1}F_n \left[\begin{matrix} 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}, \ldots, \frac{3}{2} \end{matrix} ; -1 \right] \tag{1.19}$$

$$\zeta(n, x) = x^{-n} {}_{n+1}F_n \left[\begin{matrix} 1, x, \ldots, x \\ 1+x, \ldots, 1+x \end{matrix} ; 1 \right] \tag{1.20}$$

証明. 最後の式のみ示す。あとは読者に任せる。

$$\begin{aligned}
\zeta(n, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^n} \\
&= x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)_k^n}{(1+x)_k^n} \\
&= x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (x)_k^n}{(1+x)_k^n k!} \\
&= x^{-n} {}_{n+1}F_n \left[\begin{matrix} 1, x, \ldots, x \\ 1+x, \ldots, 1+x \end{matrix} ; 1 \right]
\end{aligned}$$

□

また、ディガンマ関数で表せる以下の式もある。

定理 1.26.

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1, x \\ 1+x \end{matrix} ; -1 \right] = \frac{x}{2} \left(\psi\left(\frac{1+x}{2} \right) - \psi\left(\frac{x}{2} \right) \right)$$

証明.

$$\begin{aligned}
{}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1, x \\ 1+x \end{matrix} ; -1 \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)_n}{(1+x)_n} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+x} - \frac{1}{2n+1+x} \right) \\
&= \frac{x}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{x}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1+x}{2}} \right) \\
&= \frac{x}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{x}{2}} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\frac{1+x}{2}} \right) \\
&= \frac{x}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{x}{2}} - \frac{1}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\frac{1+x}{2}} \right) \\
&= \frac{x}{2} \left(-\gamma - \psi\left(\frac{x}{2} \right) + \gamma + \psi\left(\frac{1+x}{2} \right) \right) \\
&= \frac{x}{2} \left(\psi\left(\frac{1+x}{2} \right) - \psi\left(\frac{x}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

□

1.6 二項定理

次は、多項式の二項定理の一般化である。

定理 1.27. 二項定理

$$ {}_1F_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; z\right] = (1-z)^{-a} $$

証明. 右辺の関数を $f(z)$ とする。

$$ f^{(n)}(z) = (a)_n (1-z)^{-a-n} $$

より、$f^{(n)}(0) = (a)_n$
よって、$f(z)$ を Maclaurin 展開すると、

$$ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n = {}_1F_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; z\right] $$

が得られる。 □

多項式の二項定理は以下のように導出できる。

系 1.7.

$$ (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k $$

証明.

$$ \begin{aligned} (1+x)^n &= {}_1F_0\left[\begin{matrix} -n \\ - \end{matrix}; -x\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{k!} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \end{aligned} $$

□

次は綺麗な式である。

系 1.8.

$$ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n $$

証明.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n\end{aligned}$$

□

これは、

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)x^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)x^3 + \cdots$$

というように表され、このように展開することにより、より美しくなると思う。

定理 1.28. Vandermonde の恒等式

$$_2F_1\left[\begin{matrix} b, -n \\ c \end{matrix}; 1\right] = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}$$

証明.

$$(1-z)^{-a}(1-z)^{-b} = (1-z)^{-(a+b)}$$

二項定理より、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)_n}{n!} z^n$$

両辺の z の係数を比較すると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k (b)_{n-k}}{k!(n-k)!} &= \frac{(a+b)_n}{n!} \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k (b)_n (-n)_k}{(1-n-b)_k k! n!} &= \frac{(a+b)_n}{n!} \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(a,-n)_k}{(1-n-b)_k k!} &= \frac{(a+b)_n}{(b)_n} \\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, -n \\ 1-n-b \end{matrix}; 1\right] &= \frac{(a+b)_n}{(b)_n}\end{aligned}$$

ここで、$a \mapsto b, \quad b \mapsto 1-n-c$ と置換すると、

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left[\begin{matrix} b, -n \\ c \end{matrix}; 1\right] &= \frac{(1-n+b-c)_n}{(1-n-c)_n} \\ &= \frac{(c-b)_n}{(c)_n}\end{aligned}$$

□

これは次のような形にも表される。

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(b)_k}{(c)_k} = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}$$

系 1.9.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

証明. 上の式に $b=\frac{1}{2},\quad c=1$ を代入すればよい。 □

次の等式も Vandermonde の恒等式とよばれるものである。

系 1.10.

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+m}{r}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}&=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\frac{(-n)_k}{k!}\cdot\frac{m!}{(r-k)!(m-r+k)!}\\
&=\frac{m!}{r!}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-n)_k}{k!}\cdot\frac{(-1)^k r!}{(r-k)!(m-r)!(m-r+1)_k}\\
&=\frac{m!}{r!(m-r)!}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-n)_k}{k!}\cdot\frac{(-r)_k}{(m-r+1)_k}\\
&=\frac{m!}{r!(m-r)!}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,-r\\ m-r+1\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

ここで、Vandermonde の恒等式より、

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,-r\\ m-r+1\end{matrix};1\right]=\frac{(m+1)_n}{(m-r+1)_n}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}&=\frac{m!}{r!(m-r)!}\frac{(m+1)_n}{(m-r+1)_n}\\
&=\frac{(n+m)!}{r!(n+m-r)!}\\
&=\binom{n+m}{r}
\end{aligned}$$

□

系 1.11.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{n+m}{n}$$

証明. 上の系で、$r=m$ とすればよい。 □

次の等式は後で使うわけではないが、考えが面白いので、ここで証明する。

定理 1.29. 二項係数の反転公式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k=b_n$$

としたとき、

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k = a_n$$

証明.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = b_n$$

両辺の指数型母関数を考えれば、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!} \\
\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!(n-k)!} &= \sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!} \\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!} \\
e^x\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!} \\
\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!} &= e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

ここで、両辺の x の係数を比較すると、

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n!} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{b_k}{k!} \\
a_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k
\end{aligned}$$

□

第 2 章

Gauss の超幾何関数

次を Gauss の超幾何関数という。

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c)_n n!} z^n $$

Gauss の超幾何関数は理論的に重要であるが、ここでは単に超幾何級数として扱う。

2.1 Euler 積分表示

定理 2.1. Gauss の超幾何関数の Euler 積分表示

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};z\right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}\,dx, \qquad Re(c-a-b)>0 $$

証明.

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};z\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c)_n n!} z^n \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n \mathrm{B}(b+n,c-b) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n \int_0^1 x^{b+n-1}(1-x)^{c-b-1}\,dx \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} (zx)^n\,dx \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}\,dx \end{aligned} $$

□

次の定理は、有用な定理であり、Vandermonde の恒等式を特別な場合として含む。

定理 2.2. Gauss の超幾何定理

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} $$

証明. Euler 積分表示より、

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};1\right] &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-x)^{-a}\,dx \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-a-b-1}\,dx \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} \\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}
\end{aligned}
$$

□

この定理は以降断りなく用いる。

系 2.1.

$$
\frac{1}{x}+\frac{x}{1!(x+1)}+\frac{x(x+1)}{2!(x+2)}+\cdots=\frac{\pi}{\sin\pi x}
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{x}{1!(x+1)}+\frac{x(x+1)}{2!(x+2)}+\cdots &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)_n}{n!(x+n)} \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)_n(x)_n}{(1+x)_n n!} \\
&= \frac{1}{x}{}_2F_1\left[\begin{matrix}x,x\\1+x\end{matrix};1\right] \\
&= \frac{1}{x}\frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \\
&= \Gamma(x)\Gamma(1-x) \\
&= \frac{\pi}{\sin\pi x}
\end{aligned}
$$

□

次は面白い等式である。

系 2.2.

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}=\frac{c-1}{c-a-1}
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(1)_n}{(c)_n n!} \\
&= {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,1\\c\end{matrix};1\right] \\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-1)} \\
&= \frac{c-1}{c-a-1}
\end{aligned}
$$

□

系 **2.3.**

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\ b+\frac{1}{2}\end{matrix};1\right]=\frac{2^n(b)_n}{(2b)_n} $$

証明. Gauss の超幾何定理より、

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\ b+\frac{1}{2}\end{matrix};1\right] &= \frac{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b+n)}{\Gamma\left(b+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(b+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \\ &= \frac{2^{1-2b}\sqrt{\pi}\Gamma(2b)}{2^{1-2b-n}\sqrt{\pi}\Gamma(2b+n)}(b)_n \\ &= \frac{2^n(b)_n}{(2b)_n} \end{aligned} $$

□

一見複雑そうにみえるが、これはかなり有用な形をしている。

$$ \left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\right)_k=\frac{(-n)_{2k}}{2^{2k}} $$

となるからである。

系 **2.4.**

$$ 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2+\cdots=\frac{4}{\pi} $$

証明.

$$ \begin{aligned} 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2+\cdots &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n^2}{n!^2} \\ &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix};1\right] \\ &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned} $$

□

2.2 変換公式

定理 2.3. Pfaff の変換公式

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,c-b\\ c\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right] $$

証明.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}\,dx, \qquad x\to 1-x\\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 (1-x)^{b-1}x^{c-b-1}(1-z+zx)^{-a}\,dx\\
&= (1-z)^{-a}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 x^{c-b-1}(1-x)^{b-1}\left(1-\frac{z}{z-1}x\right)^{-a}\,dx\\
&= (1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,c-b\\c\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right]
\end{aligned}
$$

□

これは級数の変形によっても証明することができるが、Euler 積分表示を通した方が、見通しがよい。

系 2.5.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};z\right] = \frac{1}{\sqrt{1-z}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right]
$$

証明. Pfaff の変換公式で、$a=b=\frac{1}{2},\quad c=1$ とすればよい。 □

次が使いやすい変換公式である。

定理 2.4. Euler の変換公式

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] = (1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};z\right]
$$

証明. Pfaff の変換公式を二回適用する。

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] &= (1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-b,a\\c\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right]\\
&= (1-z)^{-a}\left(1-\frac{z}{z-1}\right)^{-(c-b)}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};\frac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z}{z-1}-1}\right]\\
&= (1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};z\right]
\end{aligned}
$$

□

次のように無限和を有限和に変換することができる。

系 2.6.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,c+n\\c\end{matrix};z\right] = (1-z)^{-n-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,-n\\c\end{matrix};z\right]
$$

証明. Euler の変換公式で、$b=c+n$ とすればよい。 □

次はよく知られた等式である。

系 2.7.

$$
\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}
$$

証明. Euler の変換公式で、$a = b = \frac{1}{2},\quad c = \frac{3}{2},\quad z = x^2$ とすれば、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix};x^2\right] &= \sqrt{1-x^2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}1,1\\ \frac{3}{2}\end{matrix};x^2\right] \\
\frac{\arcsin x}{x} &= \sqrt{1-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!^2}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!}x^{2n} \\
\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!^2}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!}x^{2n+1} \\
\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}
\end{aligned}$$

□

定理 2.5.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,-a\\ \frac{1}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{z^2-1}\right] = \cosh\left(a\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\right)$$

証明. 二項定理より、

$$\begin{aligned}
\frac{(1-z)^{-2a}+(1+z)^{-2a}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2a)_n}{n!}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2a)_n}{n!}z^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2a)_{2n}}{(2n)!}z^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a,\frac{1}{2}+a\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n n!}z^{2n} \\
&= {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\ \frac{1}{2}\end{matrix};z^2\right]
\end{aligned}$$

ここで、Pfaff の変換公式より、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\ \frac{1}{2}\end{matrix};z^2\right] = (1-z^2)^{-a}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,-a\\ \frac{1}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{z^2-1}\right]$$

よって、

$$(1-z^2)^{-a}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,-a\\ \frac{1}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{z^2-1}\right] = \frac{(1-z)^{-2a}+(1+z)^{-2a}}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,-a\\ \frac{1}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{z^2-1}\right] &= (1-z^2)^a\frac{(1-z)^{-2a}+(1+z)^{-2a}}{2} \\
&= (1-z)^a(1+z)^a\frac{(1-z)^{-2a}+(1+z)^{-2a}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^a+\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^a\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{a\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)}+e^{a\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}\right) \\
&= \cosh\left(a\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\right)
\end{aligned}$$

□

z の一次変換ではないようなものもある。

定理 2.6. Kummer の二次の変換公式

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};2z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\b+\frac{1}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{(1-z)^2}\right]
$$

証明. 系 2.3 より、

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};2z\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(2b)_n n!}(2z)^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\frac{2^n(b)_n}{(2b)_n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\b+\frac{1}{2}\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\right)_k}{\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-n)_{2k}}{2^{2k}\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!}
\end{aligned}
$$

ここで、和をとる順番を交換して、

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-n)_{2k}}{2^{2k}\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!}&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2k}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\frac{(-n)_{2k}}{2^{2k}\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!},\qquad n\to n+2k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2k}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\frac{n!}{2^{2k}\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!(n-2k)!}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_{n+2k}z^{n+2k}\frac{1}{2^{2k}\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!n!}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!}z^{2k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+2k}}{n!}z^n\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_{2k}}{2^{2k}\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!}z^{2k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k)_n z^n}{n!}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_{2k}}{2^{2k}\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!}z^{2k}(1-z)^{-a-2k}\\
&=(1-z)^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_{2k}}{2^{2k}\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!}\left(\frac{z^2}{(1-z)^2}\right)^k\\
&=(1-z)^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\right)_k}{\left(b+\frac{1}{2}\right)_k k!}\left(\frac{z^2}{(1-z)^2}\right)^k\\
&=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\b+\frac{1}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{(1-z)^2}\right]
\end{aligned}
$$

□

補題 2.1. $|z|>1$ ならば、

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\2a\end{matrix};\frac{1}{z}\right]^{-1}=\left\{\sqrt[2]{1-\frac{1}{2z}}\sqrt[4]{1-\frac{1}{2(2z-1)^2}}\sqrt[8]{1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}}\cdots\right\}^{2a-1}
$$
$$
\times\left(1-\frac{1}{2z}\right)\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)\cdots
$$

ここで、分母の数列は

$$
a_0=2z,\quad a_{n+1}=2(a_n-1)^2
$$

で定められるとする。

証明. 定理 2.6 を連続して適用して、

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+a,a\\2a\end{matrix};\frac{1}{z}\right]&=\left(1-\frac{1}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{4}+\frac{a}{2},\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\\\frac{1}{2}+a\end{matrix};\frac{1}{(2z-1)^2}\right]\\
&=\left(1-\frac{1}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}-a}\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)^{-\frac{3}{4}-\frac{a}{2}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{3}{8}+\frac{a}{4},\frac{7}{8}+\frac{a}{4}\\\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\end{matrix};\frac{1}{(2(2z-1)^2-1)^2}\right]\\
&=\left(1-\frac{1}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}-a}\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)^{-\frac{3}{4}-\frac{a}{2}}\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)^{-\frac{7}{8}-\frac{a}{4}}\cdots\\
&\quad\times{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{2^n-1}{2^{n+1}}+\frac{a}{2^n},\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}+\frac{a}{2^n}\\\frac{2^n-1}{2^n}+\frac{a}{2^{n-1}}\end{matrix};\frac{2}{a_n}\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$|z|>1$ ならば、$|(2z-1)^2|>|z|$ であり、

$$
\frac{2}{a_n}=\frac{1}{(2(2(\cdots((2z-1)^2-1)^2\cdots-1)^2-1)^2-1)^2}
$$

は 0 に収束するから、

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+a,a\\2a\end{matrix};\frac{1}{z}\right]=\left(1-\frac{1}{2z}\right)^{-\frac{1}{2}-a}\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)^{-\frac{3}{4}-\frac{a}{2}}\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)^{-\frac{7}{8}-\frac{a}{4}}\cdots
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\2a\end{matrix};\frac{1}{z}\right]^{-1}&=\left(1-\frac{1}{2z}\right)^{\frac{1}{2}+a}\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{a}{2}}\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)^{\frac{7}{8}+\frac{a}{4}}\cdots\\
&=\left(1-\frac{1}{2z}\right)^{a-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)^{\frac{a}{2}-\frac{1}{4}}\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)^{\frac{a}{4}-\frac{1}{8}}\cdots\\
&\quad\times\left(1-\frac{1}{2z}\right)\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)\cdots\\
&=\left\{\sqrt[2]{1-\frac{1}{2z}}\sqrt[4]{1-\frac{1}{2(2z-1)^2}}\sqrt[8]{1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}}\cdots\right\}^{2a-1}\\
&\quad\times\left(1-\frac{1}{2z}\right)\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)\cdots
\end{aligned}
$$

□

定理 2.7.

$$
\left(1-\frac{1}{2z}\right)\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)\cdots=\sqrt{1-\frac{1}{z}}
$$

証明. 補題 2.1 において、$a = \frac{1}{2}$ とすれば、

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2z}\right)\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)\cdots &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},1\\1\end{matrix};\frac{1}{z}\right]^{-1}\\ &= {}_1F_0\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\\-\end{matrix};\frac{1}{z}\right]^{-1}\\ &= \left(1-\frac{1}{z}\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{1-\frac{1}{z}}\end{aligned}$$

□

定理 2.8.

$$\sqrt[2]{1-\frac{1}{2z}}\sqrt[4]{1-\frac{1}{2(2z-1)^2}}\sqrt[8]{1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}}\cdots = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}\right)$$

証明. 補題 2.1 に定理 2.7 を用いて、

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\2a\end{matrix};\frac{1}{z}\right]^{-1} = \left\{\sqrt[2]{1-\frac{1}{2z}}\sqrt[4]{1-\frac{1}{2(2z-1)^2}}\sqrt[8]{1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}}\cdots\right\}^{2a-1}\sqrt{1-\frac{1}{z}}$$

よって、

$$\left\{\sqrt[2]{1-\frac{1}{2z}}\sqrt[4]{1-\frac{1}{2(2z-1)^2}}\sqrt[8]{1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}}\cdots\right\}^{1-2a} = \sqrt{1-\frac{1}{z}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\2a\end{matrix};\frac{1}{z}\right]$$

$a \to 0$ として、

$$\begin{aligned}&\sqrt[2]{1-\frac{1}{2z}}\sqrt[4]{1-\frac{1}{2(2z-1)^2}}\sqrt[8]{1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}}\cdots\\ &= \sqrt{1-\frac{1}{z}}\left(1+\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(2a)_n n! z^n}\right)\\ &= \sqrt{1-\frac{1}{z}}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n! z^n}\right)\\ &= \sqrt{1-\frac{1}{z}}\left(1+\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1/2}-1\right)\right)\\ &= \sqrt{1-\frac{1}{z}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1/2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}\right)\end{aligned}$$

□

定理 2.9.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\2a\end{matrix};z\right] = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a-1}$$

証明. 補題 2.1 に定理 2.7 と定理 2.8 を適用して、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, \frac{1}{2}+a\\ 2a\end{matrix}; \frac{1}{z}\right]^{-1} = \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}\right)\right)^{2a-1}\sqrt{1-\frac{1}{z}} $$

よって、$z \mapsto \frac{1}{z}$ として、両辺の逆数をとれば、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, \frac{1}{2}+a\\ 2a\end{matrix}; z\right] = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a-1} $$

□

定理 2.10.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, \frac{1}{2}+a\\ 1+2a\end{matrix}; z\right] = \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a} $$

証明. 定理 2.9 に Euler の変換公式を適用して、

$$ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a-1} &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, \frac{1}{2}+a\\ 2a\end{matrix}; z\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}a, a-\frac{1}{2}\\ 2a\end{matrix}; z\right] \end{aligned} $$

よって、

$$ \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a-1} = {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, a-\frac{1}{2}\\ 2a\end{matrix}; z\right] $$

ここで、$a \mapsto \frac{1}{2}+a$ として、定理を得る。 □

2.3 特殊値公式

これらの公式は、超幾何級数の特殊値をガンマ関数の積で表すものである。
次は $z=-1$ での特殊値である。

定理 2.11. Kummer の定理

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, b\\ 1+a-b\end{matrix}; -1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)} $$

証明. Euler 積分表示より、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix} b, a \\ 1+a-b \end{matrix}; -1\right] &= \frac{\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-b}(1+x)^{-b}\, dx \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{-b}\, dx \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)}{2\Gamma(a)\Gamma(1-b)} \int_0^1 x^{a/2-1}(1-x)^{-b}\, dx \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)}{2\Gamma(a)\Gamma(1-b)} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma(1-b)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)} \\
&= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}
\end{aligned}$$

□

系 2.8.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, -n \\ 1+a+n \end{matrix}; -1\right] = \frac{(1+a)_n}{\left(1+\frac{a}{2}\right)_n} $$

証明. Kummer の定理で、$b=-n$ とすれば、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, -n \\ 1+a+n \end{matrix}; -1\right] &= \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a+n)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}+n\right)} \\
&= \frac{(1+a)_n}{\left(1+\frac{a}{2}\right)_n}
\end{aligned}$$

□

系 2.9.

$$ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n-k} \binom{2n}{k}^2 = \binom{2n}{n} $$

証明.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n-k} \binom{2n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^n \frac{(-1)^k (2n)!^2}{k!^2 (2n-k)!^2} \\
&= (-1)^n \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k (-2n)_k^2}{k!^2} \\
&= (-1)^n {}_2F_1\left[\begin{matrix} -2n, -2n \\ 1 \end{matrix}; -1\right]
\end{aligned}$$

ここで、$-2n$ は負の整数で、直接ガンマ関数に代入できないので、極限をとると、

$$\begin{aligned}
(-1)^n {}_2F_1\left[\begin{matrix} -2n, -2n \\ 1 \end{matrix}; -1\right] &= \lim_{x\to -2n} (-1)^n \frac{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma(1+x)\Gamma(1+n)} \\
&= (-1)^n(-1)^n \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} \\
&= \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

$\square$

系 2.10.

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\cdots=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

証明.

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\cdots &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{n!^2} \\
&= {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix};-1\right] \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}
\end{aligned}$$

$\square$

次は $z=\frac{1}{2}$ での特殊値である。

定理 2.12.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ \frac{1+a+b}{2}\end{matrix};\frac{1}{2}\right]=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)}$$

証明. Pfaff の変換公式より、

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ \frac{1+a+b}{2}\end{matrix};\frac{1}{2}\right]=2^a{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1+a-b}{2}\\ \frac{1+a+b}{2}\end{matrix};-1\right]$$

Kummer の定理より、

$$\begin{aligned}
2^a{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1+a-b}{2}\\ \frac{1+a+b}{2}\end{matrix};-1\right] &= 2^a\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2^{1-a}\sqrt{\pi}\Gamma(a)}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$\square$

定理 2.13.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, 1-a \\ c \end{matrix}; \frac{1}{2}\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+c-a}{2}\right)} $$

証明. Pfaff の変換公式より、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, 1-a \\ c \end{matrix}; \frac{1}{2}\right] = 2^a {}_2F_1\left[\begin{matrix} a+c-1, a \\ c \end{matrix}; -1\right] $$

Kummer の定理より、

$$ \begin{aligned} 2^a {}_2F_1\left[\begin{matrix} a+c-1, a \\ c \end{matrix}; -1\right] &= 2^a \frac{\Gamma\left(\frac{1+a+c}{2}\right)\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)\Gamma\left(\frac{1+c-a}{2}\right)} \\ &= \frac{2^{1-c}\sqrt{\pi}\Gamma(c)}{2^{1-a-c}\sqrt{\pi}\Gamma(a+c)} \frac{\Gamma\left(\frac{1+a+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+c-a}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a+c}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1+a+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+c-a}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+c-a}{2}\right)} \end{aligned} $$

□

次は第 1 種楕円積分の特殊値としてよく知られているものである。

系 2.11.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}; \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} $$

証明. 定理 2.12 より、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}; \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} $$

□

系 2.12.

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{54^n n!^3} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} $$

証明.

$$ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{54^n n!^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)_n}{2^n n!^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)_n}{2^n n!^2} \\ &= {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ 1 \end{matrix}; \frac{1}{2}\right] \end{aligned} $$

ここで、定理 2.12 より、

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ 1 \end{matrix}; \frac{1}{2}\right] &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \end{aligned} $$

□

z がそれ以外の値のときにも特殊値を求める式は存在し、例を挙げれば、次のような等式ができる。

定理 2.14.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}\\ \frac{a}{3}+\frac{5}{6}\end{matrix}; \frac{1}{9}\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^a \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}(1+a)\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{a}{6}\right)} $$

証明. 定理 2.6 において、$b = \frac{1+a}{3}, \quad z = -\frac{1}{2}$ とすると、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, \frac{1+a}{3}\\ \frac{2}{3}(1+a)\end{matrix}; -1\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^{-a} {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}\\ \frac{a}{3}+\frac{5}{6}\end{matrix}; \frac{1}{9}\right] $$

よって、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}\\ \frac{a}{3}+\frac{5}{6}\end{matrix}; \frac{1}{9}\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^{a} {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, \frac{1+a}{3}\\ \frac{2}{3}(1+a)\end{matrix}; -1\right] $$

ここで、Kummer の定理より、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, \frac{1+a}{3}\\ \frac{2}{3}(1+a)\end{matrix}; -1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}(1+a)\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{a}{6}\right)} $$

よって、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}\\ \frac{a}{3}+\frac{5}{6}\end{matrix}; \frac{1}{9}\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^a \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}(1+a)\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{a}{6}\right)} $$

□

系 2.13.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\\ 1\end{matrix}; \frac{1}{9}\right] = \frac{\sqrt{3}\pi}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} $$

証明. 定理 2.14 において、$a = \frac{1}{2}$ とすれば、

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\\ 1\end{matrix}; \frac{1}{9}\right] &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \end{aligned} $$

□

第 3 章

一般の超幾何級数の和公式

前の章では、Gauss の超幾何級数を扱ったが、この章では、一般の超幾何級数

$$ {}_rF_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\b_1,\ldots,b_s\end{matrix};z\right] $$

を扱い、その和公式を得る。和公式というのは、ここでは特殊値の公式のことで、実際に扱うのは以下の形である。

$$ {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{r+1}\\b_1,\ldots,b_r\end{matrix};z\right] $$

$z=1$ または、$z=-1$ となることが多い。それ以外の等式、変換公式は、次章で扱う。

3.1 ${}_3F_2$ の和公式

次の公式は Gauss の超幾何級数の積分表示と同様に証明される。

定理 3.1. 超幾何級数の Euler 積分表示

$$ {}_{r+1}F_{s+1}\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{r+1}\\b_1,\ldots,b_{s+1}\end{matrix};z\right]=\frac{\Gamma(b_{s+1})}{\Gamma(a_{r+1})\Gamma(b_{s+1}-a_{r+1})}\int_0^1 x^{a_{r+1}-1}(1-x)^{b_{s+1}-a_{r+1}-1}{}_rF_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\b_1,\ldots,b_s\end{matrix};zx\right]dx $$

証明.

$$ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(a_{r+1})\Gamma(b_{s+1}-a_{r+1})}{\Gamma(b_{s+1})}{}_{r+1}F_{s+1}\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{r+1}\\b_1,\ldots,b_{s+1}\end{matrix};z\right]\\ &=\frac{\Gamma(a_{r+1})\Gamma(b_{s+1}-a_{r+1})}{\Gamma(b_{s+1})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_{r+1})_n}{(b_1,\ldots,b_{s+1})n!}z^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)n!}z^n\frac{\Gamma(a_{r+1}+n)\Gamma(b_{s+1}-a_{r+1})}{\Gamma(b_{s+1}+n)}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)n!}z^n\int_0^1 x^{a_{r+1}+n-1}(1-x)^{b_{s+1}-a_{r+1}-1}dx\\ &=\int_0^1 x^{a_{r+1}-1}(1-x)^{b_{s+1}-a_{r+1}-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)n!}(zx)^n dx\\ &=\int_0^1 x^{a_{r+1}-1}(1-x)^{b_{s+1}-a_{r+1}-1}{}_rF_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\b_1,\ldots,b_s\end{matrix};zx\right]dx \end{aligned} $$

□

ここで、重要な ${}_3F_2$ の変換公式を証明しておく。

定理 3.2. $s = d + e - a - b - c$ としたとき、

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c\\ d, e\end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(e-c)\Gamma(s+c)} {}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a, d-b, c\\ d, s+c\end{matrix}; 1\right] $$

証明. Euler 積分表示より、${}_2F_1$ に Euler の変換公式を適用して、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c\\ d, e\end{matrix}; 1\right] &= \frac{\Gamma(e)}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)} \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{e-c-1} {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, b\\ d\end{matrix}; x\right] dx \\ &= \frac{\Gamma(e)}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)} \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{e-c-1}(1-x)^{d-a-b} {}_2F_1\left[\begin{matrix}d-a, d-b\\ d\end{matrix}; x\right] dx \\ &= \frac{\Gamma(e)}{\Gamma(c)\Gamma(e-c)} \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{s-1} {}_2F_1\left[\begin{matrix}d-a, d-b\\ d\end{matrix}; x\right] dx \\ &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(e-c)\Gamma(s+c)} \frac{\Gamma(s+c)}{\Gamma(c)\Gamma(s)} \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{s-1} {}_2F_1\left[\begin{matrix}d-a, d-b\\ d\end{matrix}; x\right] dx \\ &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(e-c)\Gamma(s+c)} {}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a, d-b, c\\ d, s+c\end{matrix}; 1\right] \end{aligned} $$

□

定理 3.3. $s = d + e - a - b - c$ としたとき、

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c\\ d, e\end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(a)\Gamma(s+b)\Gamma(s+c)} {}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a, e-a, s\\ s+b, s+c\end{matrix}; 1\right] $$

証明. 定理 3.2 を二回用いて、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c\\ d, e\end{matrix}; 1\right] &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(e-c)\Gamma(s+c)} {}_3F_2\left[\begin{matrix}c, d-b, d-a\\ s+c, d\end{matrix}; 1\right] \\ &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(e-c)\Gamma(s+c)} \frac{\Gamma(d)\Gamma(s')}{\Gamma(a)\Gamma(s'+d-a)} {}_3F_2\left[\begin{matrix}s, s+b+c-d, d-a\\ s+c, s'+d-a\end{matrix}; 1\right] \end{aligned} $$

ここで、$s' = (s+c) + d - c - (d-b) - (d-a) = s + a + b - d = e - c$ より、

$$ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(e-c)\Gamma(s+c)} \frac{\Gamma(d)\Gamma(s')}{\Gamma(a)\Gamma(s'+d-a)} {}_3F_2\left[\begin{matrix}s, s+b+c-d, d-a\\ s+c, s'+d-a\end{matrix}; 1\right] \\ =& \frac{\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(e-c)\Gamma(s+c)} \frac{\Gamma(d)\Gamma(e-c)}{\Gamma(a)\Gamma(d+e-a-c)} {}_3F_2\left[\begin{matrix}s, e-a, d-a\\ s+c, d+e-a-c\end{matrix}; 1\right] \\ =& \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(a)\Gamma(s+b)\Gamma(s+c)} {}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a, e-a, s\\ s+b, s+c\end{matrix}; 1\right] \end{aligned} $$

□

次がよく使う重要な公式である。

定理 3.4. Saalschütz の和公式

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, -n\\ c, 1-n+a+b-c\end{matrix}; 1\right] = \frac{(c-a, c-b)_n}{(c, c-a-b)_n} $$

証明. Euler の変換公式、

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right]=(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};z\right] $$

の両辺の係数を比較して、

$$ \begin{aligned} \frac{(a,b)_n}{(c)_n n!}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a+b-c)_{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{(c-a,c-b)_k}{(c)_k k!}\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a+b-c)_n(-n)_k}{(1-n+c-a-b)_k n!}\cdot\frac{(c-a,c-b)_k}{(c)_k k!}\\ &=\frac{(a+b-c)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(c-a,c-b,-n)_k}{(c,1-n+c-a-b)_k k!} \end{aligned} $$

よって、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix}c-a,c-b,-n\\c,1-n+c-a-b\end{matrix};1\right]&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(c-a,c-b,-n)_k}{(c,1-n+c-a-b)_k k!}\\ &=\frac{(a,b)_n}{(c)_n n!}\frac{n!}{(a+b-c)_n}\\ &=\frac{(a,b)_n}{(c,a+b-c)_n} \end{aligned} $$

ここで、$a\mapsto c-a,\quad b\mapsto c-b$ と置換することにより、

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\c,1-n+a+b-c\end{matrix};1\right]=\frac{(c-a,c-b)_n}{(c,c-a-b)_n} $$

□

系 3.1.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,a+n,-n\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]=\frac{(b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n} $$

証明. Saalschütz の和公式で、$a\mapsto 1+a-b-c,\quad b\mapsto a+n,\quad c\mapsto 1+a-b$ とすれば、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,a+n,-n\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]&=\frac{(c,1-b-n)_n}{(1+a-b,c-a-n)_n}\\ &=\frac{(b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n} \end{aligned} $$

□

系 3.2.

$$ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{k}\binom{c}{k}}{\binom{a+b+c}{k}}=\frac{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}{a!b!c!(a+b+c)!},\qquad a,b,c\in\mathbb{N}_0 $$

証明.

$$ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{k}\binom{c}{k}}{\binom{a+b+c}{k}}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a,-b,-c)_k k!}{(-a-b-c)_k k!^3}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a,-b,-c)_k}{(-a-b-c)_k k!^2}\\ &={}_3F_2\left[\begin{matrix}-a,-b,-c\\1,-a-b-c\end{matrix};1\right] \end{aligned} $$

ここで、Saalschützの和公式において、$a \mapsto -a, \quad b \mapsto -b, \quad n \mapsto c, \quad c \mapsto 1$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-a,-b,-c\\1,-a-b-c\end{matrix};1\right] &= \frac{(1+a,1+b)_c}{(1,1+a+b)_c}\\
&= \frac{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}{a!b!c!(a+b+c)!}
\end{aligned}
$$

□

系 3.3.

$$
\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}^3}{\binom{3n}{k}} = \frac{(2n)!^3}{n!^3(3n)!}
$$

証明. 系 3.2 において、$a=b=c=n$ とすればよい。 □

Saalschützの和公式を用いれば、以下を証明することができる。

定理 3.5. Kummer の二次の変換公式

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-b\end{matrix};z\right] = (1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\\1+a-b\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\\1+a-b\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] &= (1-z)^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\right)_k}{(1+a-b)_k k!}\left(-\frac{4z}{(1-z)^2}\right)^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\right)_k}{(1+a-b)_k k!}(-4z)^k(1-z)^{-2k-a}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\right)_k}{(1+a-b)_k k!}(-4z)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k)_n}{n!}z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\right)_k(a+2k)_n}{(1+a-b)_k k!n!}(-4)^k z^{n+k}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\right)_k(a+2k)_{n-k}}{(1+a-b)_k k!(n-k)!}(-4)^k\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,-n\right)_k(a+2k)_{n-k}}{(1+a-b)_k k!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,-n\right)_k(a)_{n+k}}{(1+a-b)_k(a)_{2k}k!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,a+n,-n\right)_k}{(1+a-b)_k(a)_{2k}k!}
\end{aligned}
$$

ここで、Saalschützの和公式より、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,a+n,-n\right)_k}{(1+a-b)_k(a)_{2k}k!} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,a+n,-n\right)_k}{\left(1+a-b,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\right)_k k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1+a}{2}-b,a+n,-n\right)_k}{\left(1+a-b,\frac{1+a}{2}\right)_k k!} \\
&= {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}-b,a+n,-n \\ 1+a-b,\frac{1+a}{2}\end{matrix};1\right] \\
&= \frac{\left(\frac{1+a}{2},1-b-n\right)_n}{(1+a-b,\frac{1-a}{2}-n)_n} \\
&= \frac{\left(\frac{1+a}{2},b\right)_n}{(1+a-b,\frac{1+a}{2})_n} \\
&= \frac{(b)_n}{(1+a-b)_n}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b \\ 1+a-b\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\frac{(b)_n}{(1+a-b)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(1+a-b)_n n!}z^n \\
&= {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b \\ 1+a-b\end{matrix};z\right]
\end{aligned}$$

□

ここで、$z=-1$ とすれば、Kummerの定理が得られる。

系 3.4.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 1\end{matrix};z\right] = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{4} \\ 1\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]$$

証明. 定理3.5で $a=b=\frac{1}{2}$ とすればよい。 □

次は ${}_3F_2$ の和公式のなかで最も美しいと思う。

定理 3.6. Dixonの恒等式

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c \\ 1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)\Gamma(1+a-b-c)}$$

証明.

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n n!}\\
&=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a-b-c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b,c)_n}{n!\Gamma(1+a+2n)}\frac{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a+2n)}{\Gamma(1+a-b+n)\Gamma(1+a-c+n)}\\
&=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b,c)_n}{n!(1+a)_{2n}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}b+n,c+n\\1+a+2n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,b,c)_n}{n!(1+a)_{2n}}\frac{(b+n,c+n)_k}{(1+a+2n)_k k!}\\
&=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b,c)_{n+k}}{n!k!(1+a)_{2n+k}}
\end{aligned}
$$

ここで、$n\mapsto n-k$ として、

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b,c)_{n+k}}{n!k!(1+a)_{2n+k}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(a)_{n-k}(b,c)_n}{(n-k)!k!(1+a)_{2n-k}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(a,b,c)_n(-n)_k(-2n-a)_k}{(1-n-a)_k k!n!(1+a)_{2n}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b,c)_n}{(1+a)_{2n}n!}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-2n-a,-n\\1-n-a\end{matrix};-1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、Kummer の定理より、

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b,c)_n}{(1+a)_{2n}n!}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-2n-a,-n\\1-n-a\end{matrix};-1\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b,c)_n}{(1+a)_{2n}n!}\frac{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}-n\right)\Gamma(1-n-a)}{\Gamma(1-2n-a)\Gamma\left(1-\frac{a}{2}\right)}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b,c)_n}{(1+a)_{2n}n!}\frac{(1-2n-a)_n}{\left(1-\frac{a}{2}-n\right)_n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b,c)_n}{(1+a)_{2n}n!}\frac{(a+n)_n}{\left(\frac{a}{2}\right)_n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2n}(b,c)_n}{(1+a)_{2n}n!}\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)_n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b,c)_n}{n!}\frac{a}{(a+2n)\left(\frac{a}{2}\right)_n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b,c)_n}{\left(1+\frac{a}{2}\right)_n n!}\\
&=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right] &= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)}\\
&= \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)\Gamma(1+a-b-c)}
\end{aligned}
$$

□

次は非常に面白い形をしている。

系 3.5.

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!},\quad a,b,c\in\mathbb{N}_0
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{a+k}\binom{a+b}{k}\binom{b+c}{b-a+k}\binom{c+a}{c-a+k}\\
&=(-1)^a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a-b)_k}{k!}\frac{(b+c)!}{(b-a+k)!(c+a-k)!}\frac{(c+a)!}{(c-a+k)!(2a-k)!}\\
&=(-1)^a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a-b)_k}{k!}\frac{(b+c)!(-1)^k(-c-a)_k}{(b-a+k)!(c+a)!}\frac{(c+a)!(-1)^k(-2a)_k}{(c-a+k)!(2a)!}\\
&=(-1)^a\frac{(b+c)!}{(2a)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2a,-a-b,-c-a)_k}{k!}\frac{1}{(b-a+k)!(c-a+k)!}\\
&=\frac{(-1)^a(b+c)!}{(2a)!(b-a)!(c-a)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2a,-a-b,-a-c)_k}{(1+b-a,1+c-a)_k k!}\\
&=\frac{(-1)^a(b+c)!}{(2a)!(b-a)!(c-a)!}{}_3F_2\left[\begin{matrix}-2a,-a-b,-a-c\\1+b-a,1+c-a\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$-2a$ は負の整数で Dixon の恒等式のガンマ関数に直接代入できないので、極限をとる。

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-2a,-a-b,-a-c\\1+b-a,1+c-a\end{matrix};1\right] &= \lim_{x\to-2a}\frac{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\Gamma(1+b-a)\Gamma(1+c-a)\Gamma(1+a+b+c)}{\Gamma(1+x)\Gamma(1+b)\Gamma(1+c)\Gamma(1+b+c)}\\
&=(-1)^a\frac{(2a)!}{a!}\frac{(b-a)!(c-a)!(a+b+c)!}{b!c!(b+c)!}\\
&=(-1)^a\frac{(2a)!(b-a)!(c-a)!(a+b+c)!}{a!b!c!(b+c)!}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}\\
&=\frac{(-1)^a(b+c)!}{(2a)!(b-a)!(c-a)!}(-1)^a\frac{(2a)!(b-a)!(c-a)!(a+b+c)!}{a!b!c!(b+c)!}\\
&=\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}
\end{aligned}
$$

□

次は有名な、Dixon の恒等式として知られているものである。

系 3.6.

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n-k}\binom{2n}{k}^3 = \frac{(3n)!}{n!^3}.$$

証明. 前の系で、$a, b, c = n$ として、$k \mapsto k - n$ とすればよい。 □

Dixon の恒等式を有限和にしたものが以下である。

系 3.7.

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, -n \\ 1+a-b, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] = \frac{\left(1+a, 1+\frac{a}{2}-b\right)_n}{\left(1+\frac{a}{2}, 1+a-b\right)_n}$$

証明. Dixon の恒等式で $c = -n$ とすると、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, -n \\ 1+a-b, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] &= \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a+n)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b+n\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}+n\right)\Gamma(1+a-b+n)} \\
&= \frac{\left(1+a, 1+\frac{a}{2}-b\right)_n}{\left(1+\frac{a}{2}, 1+a-b\right)_n}
\end{aligned}$$

□

Saalschütz の和公式は Dixon の恒等式の系ではない。

系 3.8.

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] = \delta_{n,0}$$

ここで、$\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタといい、

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

のように定義される。

証明. 系 3.7 で、$b = 1 + \frac{a}{2}$ とすると、

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] = \frac{(1+a, 0)_n}{\left(1+\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)_n} = \delta_{n,0}$$

□

次は綺麗な等式である。

系 3.9.

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}$$

証明.

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3}$$
$$={}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,1\end{matrix};1\right]$$

Dixon の恒等式で $a=b=c=\frac{1}{2}$ とすると、

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,1\end{matrix};1\right]&=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2\pi\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}\\&=\frac{2\pi^2}{2\pi\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}\\&=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}\end{aligned}$$

□

系 3.10. バーゼル問題

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

証明.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=(1-2^{-2})\zeta(2)=\frac{3}{4}\zeta(2)$$

より、

$$\zeta(2)=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

ここで、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)_n^2 n!}$$
$$={}_3F_2\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};1\right]$$

Dixon の恒等式で $a=1,\quad b=c=\frac{1}{2}$ とすると、

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(1)}=\frac{\pi^2}{8}$$

よって、

$$\zeta(2)=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$$

□

系 3.11.

$$1+\frac{1}{2}\frac{1}{5^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{9^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{13^2}+\cdots=\frac{\sqrt{2\pi}}{32}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

証明.

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}\frac{1}{5^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{9^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{13^2}+\cdots&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(4n+1)^2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)_n^2}{\left(\frac{5}{4}\right)_n^2}\\&={}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\\\frac{5}{4},\frac{5}{4}\end{matrix};1\right]\end{aligned}$$

Dixon の恒等式で $a=\frac{1}{2},\quad b=c=\frac{1}{4}$ とすると、

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\\\frac{5}{4},\frac{5}{4}\end{matrix};1\right]&=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(1)}\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\\&=\frac{1}{32\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{32\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2\\&=\frac{\sqrt{2\pi}}{32}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2\end{aligned}$$

□

定理 3.7. Watson の和公式

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\\frac{1+a+b}{2},2c\end{matrix};1\right]=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-b}{2}+c\right)}$$

証明. 定理 3.3 より、

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\\frac{1+a+b}{2},2c\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma(2c)\Gamma(s)}{\Gamma(a)\Gamma(s+b)\Gamma(s+c)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1-a+b}{2},2c-a,s\\s+b,s+c\end{matrix};1\right]$$

ここで、

$$s=\frac{1+a+b}{2}+2c-a-b-c=\frac{1-a-b}{2}+c$$

より

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma(2c)\Gamma(s)}{\Gamma(a)\Gamma(s+b)\Gamma(s+c)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1-a+b}{2},2c-a,s\\s+b,s+c\end{matrix};1\right]\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\Gamma(2c)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+c\right)}{\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1-a+b}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+2c\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}2c-a,\frac{1-a-b}{2}+c,\frac{1-a+b}{2}\\\frac{1-a+b}{2}+c,\frac{1-a-b}{2}+2c\end{matrix};1\right]\end{aligned}$$

ここで、Dixon の恒等式より、

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} 2c-a, \frac{1-a-b}{2}+c, \frac{1-a+b}{2} \\ \frac{1-a+b}{2}+c, \frac{1-a-b}{2}+2c \end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-a+b}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+2c\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma(1+2c-a)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-b}{2}+c\right)\Gamma(c)} $$

よって、

$$ \begin{aligned} &{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, c \\ \frac{1+a+b}{2}, 2c \end{matrix};1\right] \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\Gamma(2c)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+c\right)}{\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1-a+b}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+2c\right)} \frac{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-a+b}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+2c\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma(1-a+2c)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-b}{2}+c\right)\Gamma(c)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma(2c)\Gamma\left(1-\frac{a}{2}+c\right)}{\Gamma(a)\Gamma(c)\Gamma(1-a+2c)} \frac{\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-b}{2}+c\right)} \\ &= \sqrt{\pi}\frac{2^{2c-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)}{2^{a-1}\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\cdot 2^{2c-a}\Gamma\left(\frac{1-a}{2}+c\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-b}{2}+c\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-b}{2}+c\right)} \end{aligned} $$

□

系 3.12.

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{2^{8n}n!^4} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)^2\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)^2} $$

証明.

$$ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{2^{8n}n!^4} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right)_n}{n!^4} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)_n}{n!^3} \\ &= {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2} \\ 1,1 \end{matrix};1\right] \end{aligned} $$

ここで、Watson の和公式において、$a=\frac{1}{4},\quad b=\frac{3}{4},\quad c=\frac{1}{2}$ とすれば、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2} \\ 1,1 \end{matrix};1\right] &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)} \\ &= \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)^2\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)^2} \end{aligned} $$

□

系 3.13.

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!(3n)!}{108^n n!^5} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)^2} $$

証明.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{108^n n!^5} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)_n}{n!^5} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)_n}{n!^3} \\
&= {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{2} \\ 1,1\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

ここで、Watson の和公式において、$a=\frac{1}{3},\quad b=\frac{2}{3},\quad c=\frac{1}{2}$ とすれば、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{2} \\ 1,1\end{matrix};1\right] &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
&= \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)^2}
\end{aligned}$$

□

定理 3.8. $a+b=1,\quad d+e=1+2c$ のとき、

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c \\ d,e\end{matrix};1\right] = \frac{\pi\Gamma(d)\Gamma(e)}{2^{2c-1}\Gamma\left(\frac{a+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)} $$

証明. 定理 3.3 を用いる、条件より、$s=d+e-a-b-c=c$

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c \\ d,e\end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b+c)\Gamma(2c)}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a,e-a,c \\ b+c,2c\end{matrix};1\right] $$

ここで、$\frac{1+(d-a)+(e-a)}{2}=b+c$ だから、Watson の和公式より、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a,e-a,c \\ b+c,2c\end{matrix};1\right] &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma(b+c)\Gamma\left(\frac{1+2a-d-e}{2}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1+d-a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+e-a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a-d}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1+a-e}{2}+c\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma(b+c)\Gamma\left(\frac{2c+1+2a-d-e}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2c+1+a-d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2c+1+a-e}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma(b+c)\Gamma(a)}{\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+d}{2}\right)}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c \\ d,e\end{matrix};1\right] &= \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b+c)\Gamma(2c)}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma(b+c)\Gamma(a)}{\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+d}{2}\right)} \\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)}{\Gamma(2c)}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(d)\Gamma(e)}{\Gamma\left(\frac{a+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)} \\
&= \frac{2^{1-2c}\sqrt{\pi}\Gamma(2c)}{\Gamma(2c)}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(d)\Gamma(e)}{\Gamma\left(\frac{a+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi\Gamma(d)\Gamma(e)}{2^{2c-1}\Gamma\left(\frac{a+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)}
\end{aligned}$$

□

3.2 Dougall の和公式

この節の目的は、次の公式を証明し、その系として、多くの和公式を得ることである。
$1+2a+n=b+c+d+e$ であるとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a, 1+a-b-c, 1+a-b-d, 1+a-c-d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-b-c-d)_n}
\end{aligned}
$$

この Dougall の和公式は重要な式で、多くの超幾何級数の和公式、変換公式がこの公式の特殊な場合として得られる。

$$
{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix} a, a_1, a_2 \ldots a_r \\ 1+a-a_1, 1+a-a_2 \ldots, 1+a-a_r \end{matrix}; z\right]
$$

のような超幾何級数を、well-poised という。
例えば、Dixon の恒等式にでてきた、

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right]
$$

は well-poised である。
さらに、

$$
{}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, a_1, a_2 \ldots a_r \\ \frac{a}{2}, 1+a-a_1, 1+a-a_2 \ldots, 1+a-a_r \end{matrix}; z\right]
$$

ような超幾何級数を very-well-poised という。これは以下のように表すこともある

$$
W(a; a_1, \ldots, a_r)
$$

また、

$$
{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix} a_1, a_2 \ldots a_{r+1} \\ b_1, b_2, \ldots, b_r \end{matrix}; z\right]
$$

において、

$$
1+\sum_{k=1}^{r+1} a_k = \sum_{k=1}^{r} b_k
$$

を満たすとき、その超幾何級数は balanced であるという。Dougall の和公式は、very-well-poised な ${}_7F_6$ の和公式である。次が重要な式である。

定理 3.9. 展開公式

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+4}F_{r+3}\left[\begin{matrix} a, b, c, a_1, \ldots, a_r, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, b_1, \ldots, b_{r+1} \end{matrix}; z\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+a-b-c, a_1, \ldots, a_r, -n)_k (a)_{2k}}{(1+a-b, 1+a-c, b_1, \ldots, b_{r+1})_k k!}(-z)^k {}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix} a+2k, a_1+k, \ldots, a_r+k, k-n \\ b_1+k, \ldots, b_{r+1}+k \end{matrix}; z\right]
\end{aligned}
$$

証明. 系 3.1 より、

$$\begin{aligned}
&{}_{r+4}F_{r+3}\left[\begin{matrix}a,b,c,a_1,\ldots,a_r,-n\\1+a-b,1+a-c,b_1,\ldots,b_{r+1}\end{matrix};z\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,a_1,\ldots,a_r,-n)_k}{(b_1,\ldots,b_{r+1})_k k!}z^k\frac{(b,c)_k}{(1+a-b,1+a-c)_k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,a_1,\ldots,a_r,-n)_k}{(b_1,\ldots,b_{r+1})_k k!}z^k{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,a+k,-k\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,a_1,\ldots,a_r,-n)_k}{(b_1,\ldots,b_{r+1})_k k!}z^k\sum_{j=0}^{k}\frac{(1+a-b-c,a+k,-k)_j}{(1+a-b,1+a-c)_j j!}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(1+a-b-c)_j}{(1+a-b,1+a-c)_j j!}\sum_{k=j}^{n}\frac{(a,a_1,\ldots,a_r,-n)_k}{(b_1,\ldots,b_{r+1})_k k!}(a+k,-k)_j z^k\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(1+a-b-c)_j}{(1+a-b,1+a-c)_j j!}(-1)^j\sum_{k=j}^{n}\frac{(a_1,\ldots,a_r,-n)_k(a)_{k+j}}{(b_1,\ldots,b_{r+1})_k(k-j)!}z^k
\end{aligned}$$

$k\mapsto k+j$ として、

$$\begin{aligned}
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(1+a-b-c)_j}{(1+a-b,1+a-c)_j j!}(-z)^j\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(a_1,\ldots,a_r,-n)_{k+j}(a)_{k+2j}}{(b_1,\ldots,b_{r+1})_{k+j}k!}z^k\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(1+a-b-c)_j}{(1+a-b,1+a-c)_j j!}(-z)^j\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(a_1,\ldots,a_r,-n)_j(a_1+j,\ldots,a_r+j,j-n)_k(a)_{2j}(a+2j)_k}{(b_1,\ldots,b_{r+1})_j(b_1+j,\ldots,b_{r+1}+j)_k k!}z^k\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,a_1,\ldots,a_r,-n)_j(a)_{2j}}{(1+a-b,1+a-c,b_1,\ldots,b_{r+1})_j j!}(-z)^j\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(a_1+j,\ldots,a_r+j,j-n)_k(a+2j)_k}{(b_1+j,\ldots,b_{r+1}+j)_k k!}z^k\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,a_1,\ldots,a_r,-n)_j(a)_{2j}}{(1+a-b,1+a-c,b_1,\ldots,b_{r+1})_j j!}(-z)^j{}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}a+2j,a_1+j,\ldots,a_r+j,j-n\\b_1+j,\ldots,b_{r+1}+j\end{matrix};z\right]
\end{aligned}$$

$j\mapsto k$ として、定理を得る。 □

補題 3.1.

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,-n\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a+n\end{matrix};1\right]=\frac{(1+a,1+a-b-c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n}$$

証明. 定理 3.9 より、

$$\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,-n\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a+n\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(1+a-b-c,1+\frac{a}{2},-n\right)_k(a)_{2k}}{\left(1+a-b,1+a-c,\frac{a}{2},1+a+n\right)_k k!}(-1)^k{}_3F_2\left[\begin{matrix}a+2k,1+\frac{a}{2}+k,k-n\\\frac{a}{2}+k,1+a+n+k\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

ここで、系 3.8 より、

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a+2k,1+\frac{a}{2}+k,k-n\\\frac{a}{2}+k,1+a+n+k\end{matrix};1\right]=\delta_{n-k,0}=\delta_{n,k}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1+a-b-c, 1+\frac{a}{2}, -n\right)_k (a)_{2k}}{\left(1+a-b, 1+a-c, \frac{a}{2}, 1+a+n\right)_k k!}(-1)^k {}_3F_2\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+a+n+k \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{\left(1+a-b-c, 1+\frac{a}{2}, -n\right)_n (a)_{2n}}{\left(1+a-b, 1+a-c, \frac{a}{2}, 1+a+n\right)_n n!}(-1)^n \\
&= \frac{(1+a-b-c)_n}{(1+a-b, 1+a-c)_n} \frac{a+2n}{a} \frac{(a)_{2n}}{(1+a+n)_n} \frac{(-1)^n(-n)_n}{n!} \\
&= \frac{(1+a-b-c)_n}{(1+a-b, 1+a-c)_n} \frac{(1+a)_{2n}}{(1+a+n)_n} \\
&= \frac{(1+a-b-c)_n}{(1+a-b, 1+a-c)_n}(1+a)_n \\
&= \frac{(1+a, 1+a-b-c)_n}{(1+a-b, 1+a-c)_n}
\end{aligned}
$$

□

定理 3.10. Whipple の変換公式

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a, 1+a-d-e)_n}{(1+a-d, 1+a-e)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, d+e-n-a \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 3.9 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1+a-b-c, 1+\frac{a}{2}, d, e, -n\right)_k (a)_{2k}}{\left(1+a-b, 1+a-c, \frac{a}{2}, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n\right)_k k!}(-1)^k \\
&\times {}_5F_4\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, d+k, e+k, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+a-d+k, 1+a-e+k, 1+a+n+k \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、補題 3.1 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, d+k, e+k, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+a-d+k, 1+a-e+k, 1+a+n+k \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a+2k, 1+a-d-e)_{n-k}}{(1+a-d+k, 1+a-e+k)_{n-k}} \\
&= \frac{(-1)^k(1+a)_{n+k}(1+a-d-e)_n(1+a-d, 1+a-e)_k}{(1+a)_{2k}(d+e-n-a)_k(1+a-d, 1+a-e)_n} \\
&= \frac{(-1)^k(1+a, 1+a-d-e)_n(1+a-d, 1+a-e, 1+a+n)_k}{(1+a-d, 1+a-e)_n(1+a)_{2k}(d+e-n-a)_k}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1+a-b-c, 1+\frac{a}{2}, d, e, -n\right)_k (a)_{2k}}{\left(1+a-b, 1+a-c, \frac{a}{2}, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n\right)_k k!} (-1)^k \\
&\times \frac{(-1)^k (1+a, 1+a-d-e)_n (1+a-d, 1+a-e, 1+a+n)_k}{(1+a-d, 1+a-e)_n (1+a)_{2k} (d+e-n-a)_k} \\
&= \frac{(1+a, 1+a-d-e)_n}{(1+a-d, 1+a-e)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+a-b-c, d, e, -n)_k}{(1+a-b, 1+a-c, d+e-n-a)_k k!} \frac{(a)_{2k}\left(1+\frac{a}{2}\right)_k}{(1+a)_{2k}\left(\frac{a}{2}\right)_k} \\
&= \frac{(1+a, 1+a-d-e)_n}{(1+a-d, 1+a-e)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+a-b-c, d, e, -n)_k}{(1+a-b, 1+a-c, d+e-n-a)_k k!} \\
&= \frac{(1+a, 1+a-d-e)_n}{(1+a-d, 1+a-e)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, d+e-n-a \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 3.11. Dougall の和公式

$1+2a+n=b+c+d+e$ であるとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a, 1+a-b-c, 1+a-b-d, 1+a-c-d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-b-c-d)_n}
\end{aligned}
$$

証明. $1+2a+n=b+c+d+e$ のとき、$d+e-n-a=1+a-b-c$ であるから、Whipple の変換公式より、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a, 1+a-d-e)_n}{(1+a-d, 1+a-e)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, d+e-n-a \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a, 1+a-d-e)_n}{(1+a-d, 1+a-e)_n} {}_3F_2\left[\begin{matrix} d, e, -n \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$d+e-n+1=(1+a-b)+(1+a-c)$ であるから、Saalschütz の和公式より、

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} d, e, -n \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right] = \frac{(1+a-b-d, 1+a-b-e)_n}{(1+a-b, 1+a-b-d-e)_n}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a, 1+a-d-e)_n}{(1+a-d, 1+a-e)_n} \frac{(1+a-b-d, 1+a-b-e)_n}{(1+a-b, 1+a-b-d-e)_n} \\
&= \frac{(1+a, 1+a-b-d, 1+a-b-e, 1+a-d-e)_n}{(1+a-b, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-b-d-e)_n}
\end{aligned}
$$

ここで、左辺は b, c, d, e について対称だから、$c \leftrightarrow e$ とすれば、定理を得る。 □

定理 3.12.

$$ {}_5F_4\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d \end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)} $$

証明. Dougall の和公式より、$1+2a+n = b+c+d+e$ であるとき、

$$ \begin{aligned} &{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\ &= \frac{(1+a, 1+a-b-c, 1+a-b-d, 1+a-c-d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-b-c-d)_n} \end{aligned} $$

ここで、a, b, c, d を固定すると、$s = 1+2a-b-c-d$ とおいて、$e = s+n$ である。よって、n について両辺の極限をとれば、

$$ \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} {}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, s+n, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-s-n, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+a, 1+a-b-c, 1+a-b-d, 1+a-c-d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-b-c-d)_n} \\ &{}_5F_4\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d \end{matrix}; 1\right] \\ &= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)} \end{aligned} $$

□

系 3.14.

$$ 1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4 + \cdots = \frac{4}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} $$

証明.

$$ \begin{aligned} 1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4 + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty}(8n+1)\frac{\left(\frac{1}{4}\right)_n^4}{n!^4} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{9}{8}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n^4}{\left(\frac{1}{8}\right)_n n!^4} \\ &= {}_5F_4\left[\begin{matrix} \frac{9}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8}, 1, 1, 1 \end{matrix}; 1\right] \end{aligned} $$

ここで、定理 3.12 において、$a = b = c = d = \frac{1}{4}$ とすれば、

$$ \begin{aligned} {}_5F_4\left[\begin{matrix} \frac{9}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8}, 1, 1, 1 \end{matrix}; 1\right] &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^3} \\ &= \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\pi\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \end{aligned} $$

□

定理 3.13.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; -1\right] = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}
$$

証明. 定理 3.12 において、$d \to -\infty$ とすれば、定理を得る。 $\square$

次の等式は、ガンマ関数が出てこないので、他の式より綺麗な式だと思う。

系 3.15.

$$
1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots = \frac{2}{\pi}
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+1)\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{n!^3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{5}{4}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{\left(\frac{1}{4}\right)_n n!^3} \\
&= {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, 1, 1 \end{matrix}; -1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、定理 3.13 において、$a = b = c = \frac{1}{2}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, 1, 1 \end{matrix}; -1\right] &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

$\square$

少し一般化すると美しい式ができる。

系 3.16.

$$
\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{2n}{a}\right)\frac{(a)_n^3}{n!^3} = \frac{\sin\pi a}{\pi a}
$$

証明.

$$
\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{2n}{a}\right)\frac{(a)_n^3}{n!^3} = {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+\frac{a}{2}, a, a, a \\ \frac{a}{2}, 1, 1 \end{matrix}; -1\right]
$$

定理 3.13 において、$a = b = c$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+\frac{a}{2}, a, a, a \\ \frac{a}{2}, 1, 1 \end{matrix}; -1\right] &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)} \\
&= \frac{\sin\pi a}{\pi a}
\end{aligned}
$$

$\square$

定理 3.14.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma\left(1+a-c\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma(\frac{1+a}{2}-b-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-c\right)}
$$

証明. 定理 3.12 において、$d = \frac{1+a}{2}$ とおくと、

$$ {}_5F_4\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, \frac{1+a}{2} \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, \frac{1+a}{2} \end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma\left(1+a-c\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma(\frac{1+a}{2}-b-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-c\right)} $$

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma\left(1+a-c\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma(\frac{1+a}{2}-b-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-c\right)} $$

□

3.3 Karlsson-Minton の和公式

補題 3.2. $m < a$ のとき、m 次以下の多項式 $P(x)$ について、

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)_n}{n!} P(n) = 0 $$

証明. $k \leq m$ とする。

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)_n}{n!} z^n = (1-z)^a $$

の両辺を k 回微分すれば、

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)_n}{n!} n(n-1)\cdots(n-k+1)z^{n-k} = (-1)^k a(a-1)\cdots(a-k+1)(1-z)^{a-k} $$

ここで、$z=1$ とすることにより、

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)_n}{n!} n(n-1)\cdots(n-k+1) = 0 $$

ここで、任意の m 次以下の多項式は、m 次以下の下降階乗冪の階乗の線形結合でかけるので、

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)_n}{n!} P(n) = 0 $$

□

補題 3.3. 最高次の係数が 1 の m 次の多項式 $P(x)$ について、

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m)_n}{n!} P(n) = (-1)^m m! $$

証明.

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m)_n}{n!} z^n = (1-z)^m $$

の両辺を m 回微分すれば、

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m)_n}{n!} n(n-1)\cdots(n-m+1)z^{n-m} = (-1)^m m! $$

ここで、$z=1$ とすれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-m)_n}{n!}n(n-1)\cdots(n-m+1)=(-1)^m m!$$

ここで、m 次多項式は m 次以下の下降階乗冪の線形結合でかけ、補題 3.2 より、m 次未満の下降階乗冪はすべて 0 になるので、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-m)_n}{n!}P(n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-m)_n}{n!}n(n-1)\cdots(n-m+1)=(-1)^m m!$$

□

定理 3.15. $\sum_{k=1}^{r} m_k < a$ のとき、

$$ {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-a, c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]=0$$

証明.

$$\begin{aligned}
{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-a, c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)_n}{n!}\frac{(c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r)_n}{(c_1,\ldots,c_r)_n}\\
&=\frac{1}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_r)_{m_r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)_n}{n!}\frac{(c_1)_{n+m_1}\cdots(c_r)_{n+m_r}}{(c_1,\ldots,c_r)_n}\\
&=\frac{1}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_r)_{m_r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)_n}{n!}(c_1+n)_{m_1}\cdots(c_r+n)_{m_r}
\end{aligned}$$

ここで、$\sum_{k=1}^{r} m_k < a$ で、

$$(c_1+n)_{m_1}\cdots(c_r+n)_{m_r}$$

は $\sum_{k=1}^{r} m_k$ 次の多項式であるから、補題 3.2 より、

$$ {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-a, c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]=0$$

□

定理 3.16.

$$ {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-(m_1+\cdots+m_r), c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]=(-1)^{m_1+\cdots+m_r}\frac{(m_1+\cdots+m_r)!}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_r)_{m_r}}$$

証明.

$$\begin{aligned}
&{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-(m_1+\cdots+m_r), c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-(m_1+\cdots+m_r))_n}{n!}\frac{(c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r)_n}{(c_1,\ldots,c_r)_n}\\
&=\frac{1}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_r)_{m_r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-(m_1+\cdots+m_r))_n}{n!}\frac{(c_1)_{n+m_1}\cdots(c_r)_{n+m_r}}{(c_1,\ldots,c_r)_n}\\
&=\frac{1}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_r)_{m_r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-(m_1+\cdots+m_r))_n}{n!}(c_1+n)_{m_1}\cdots(c_r+n)_{m_r}
\end{aligned}$$

ここで、

$$(c_1+n)_{m_1}\cdots(c_r+n)_{m_r}$$

は $\sum_{k=1}^r m_k$ 次の多項式であるから、補題 3.3 より、

$$ {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-(m_1+\cdots+m_r), c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right] = (-1)^{m_1+\cdots+m_r}\frac{(m_1+\cdots+m_r)!}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_r)_{m_r}}$$

□

定理 3.17. Karlsson-Minton の和公式
$\sum_{k=1}^r m_k < 1+a$ のとき、

$$ {}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}-a,b,c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ 1+b,c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)}\prod_{k=1}^r\frac{(c_k-b)_{m_k}}{(c_k)_{m_k}}$$

証明.

$$\begin{aligned}
&{}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}-a,b,c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ 1+b,c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-a)_n b}{(b+n)n!}\frac{(c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r)_n}{(c_1,\ldots,c_r)_n}\\
&=b\sum_{n=0}^\infty\frac{(-a)_n}{n!}\frac{(c_1+m_1,\ldots,c_{r-1}+m_{r-1})_n}{(c_1,\ldots,c_{r-1})_n}\frac{(c_r+m_r)_n}{(c_r)_n(b+n)}\\
&=b\sum_{n=0}^\infty\frac{(-a)_n}{n!}\frac{(c_1+m_1,\ldots,c_{r-1}+m_{r-1})_n}{(c_1,\ldots,c_{r-1})_n}\frac{(c_r+n)_{m_r}}{(c_r)_{m_r}(b+n)}\\
&=\frac{b}{c_r+m_r-1}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-a)_n}{n!}\frac{(c_1+m_1,\ldots,c_{r-1}+m_{r-1})_n}{(c_1,\ldots,c_{r-1})_n}\frac{(c_r+n)_{m_r-1}}{(c_r)_{m_r-1}}\frac{c_r+m_r-1+n}{b+n}\\
&=\frac{b}{c_r+m_r-1}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-a)_n}{n!}\frac{(c_1+m_1,\ldots,c_{r-1}+m_{r-1},c_r+m_r-1)_n}{(c_1,\ldots,c_{r-1},c_r)_n}\left(1+\frac{c_r-b+m_r-1}{b+n}\right)\\
&=\frac{b}{c_r+m_r-1}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-a)_n}{n!}\frac{(c_1+m_1,\ldots,c_{r-1}+m_{r-1},c_r+m_r-1)_n}{(c_1,\ldots,c_{r-1},c_r)_n}\\
&+\frac{c_r-b+m_r-1}{c_r+m_r-1}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-a)_n b}{(b+n)n!}\frac{(c_1+m_1,\ldots,c_{r-1}+m_{r-1},c_r+m_r-1)_n}{(c_1,\ldots,c_{r-1},c_r)_n}\\
&=\frac{b}{c_r+m_r-1}{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-a,c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r-1\\ c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]\\
&+\frac{c_r-b+m_r-1}{c_r+m_r-1}{}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}-a,b,c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r-1\\ 1+b,c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

ここで、$\sum_{k=1}^r m_k < 1+a$ と、補題 3.2 より、第一項は 0 である。よって、

$$\begin{aligned}
&{}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}-a,b,c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ 1+b,c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{c_r-b+m_r-1}{c_r+m_r-1}{}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}-a,b,c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r-1\\ 1+b,c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

これを連続して適用することにより、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}-a, b, c_1+m_1, \dots, c_r+m_r \\ 1+b, c_1, \dots, c_r\end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(c_r-b)_{m_r}}{(c_r)_{m_r}}\,{}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}-a, b, c_1+m_1, \dots, c_{r-1}+m_{r-1} \\ 1+b, c_1, \dots, c_{r-1}\end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(c_1-b)_{m_1}\cdots(c_r-b)_{m_r}}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_r)_{m_r}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-a, b \\ 1+b\end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(c_1-b)_{m_1}\cdots(c_r-b)_{m_r}}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_r)_{m_r}}\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)}
\end{aligned}
$$

となって、定理を得る。 □

第 4 章

一般の超幾何級数の変換公式

前の章では超幾何級数の和公式について扱ったが、この章では超幾何級数の変換公式について扱う。

4.1 Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式

$${}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\c\end{matrix};z\right]$$

は合流型超幾何関数と呼ばれており、重要である。以下の有名な変換公式が存在する。

定理 4.1. Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式

$${}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\c\end{matrix};z\right]=e^z{}_1F_1\left[\begin{matrix}c-a\\c\end{matrix};-z\right]$$

証明. ${}_2F_1$ の Euler の変換公式より、

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{z}{b}\right]=\left(1-\frac{z}{b}\right)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};\frac{z}{b}\right]$$

ここで、$b\to\infty$ とすると、

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{z}{b}\right]&=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{z}{b}\right)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};\frac{z}{b}\right]\\{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\c\end{matrix};z\right]&=e^z{}_1F_1\left[\begin{matrix}c-a\\c\end{matrix};-z\right]\end{aligned}$$

□

次は無限和を有限和に帰着し、有用である。

系 4.1.

$${}_1F_1\left[\begin{matrix}a+n\\a\end{matrix};z\right]=e^z{}_1F_1\left[\begin{matrix}-n\\a\end{matrix};-z\right]$$

証明. Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式で $a\to a+n,\quad c\to a$ とすればよい。 □

次は面白い等式である。

系 4.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(a)_{n+1}}=e^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{(n+a)n!}$$

証明. Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式より、

$$\begin{aligned}
{}_1F_1\left[\begin{matrix}1\\1+a\end{matrix};z\right]&=e^z{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\1+a\end{matrix};-z\right]\\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(a+1)_n}&=e^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{(n+a)n!}(-z)^n\\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a(a+1)_n}&=e^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{(n+a)n!}\\
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(a)_{n+1}}&=e^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{(n+a)n!}
\end{aligned}$$

□

定理 4.2.

$${}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\2a\end{matrix};2z\right]=e^z{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2}+a\end{matrix};\frac{z^2}{4}\right]$$

証明. 系 2.3 より、

$$\begin{aligned}
{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\2a\end{matrix};2z\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(a)_n}{(2a)_n n!}z^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\\frac{1}{2}+a\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}+a\right)_k k!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-n)_{2k}}{2^{2k}\left(\frac{1}{2}+a\right)_k k!}\frac{z^n}{n!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{z^n}{2^{2k}\left(\frac{1}{2}+a\right)_k k!(n-2k)!}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2k}^{\infty}\frac{z^n}{2^{2k}\left(\frac{1}{2}+a\right)_k k!(n-2k)!},\qquad n\to n+2k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+2k}}{2^{2k}\left(\frac{1}{2}+a\right)_k k!n!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{2^{2k}\left(\frac{1}{2}+a\right)_k k!}\\
&=e^z{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2}+a\end{matrix};\frac{z^2}{4}\right]
\end{aligned}$$

□

ここで、次のような定理を準備しておく。

定理 4.3.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\c,d\end{matrix};1\right]=\frac{(c+d-a-b)_n}{(d)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}c-a,c-b,-n\\c,c+d-a-b\end{matrix};1\right] $$

証明. 定理 3.2 より、$s=d+e-a-b-c$ として、

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\d,e\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(e-c)\Gamma(s+c)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a,d-b,c\\d,s+c\end{matrix};1\right] $$

ここで、$c\to -n$ とすれば、$s=d+e-a-b+n$ だから、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\d,e\end{matrix};1\right]&=\frac{\Gamma(e)\Gamma(d+e-a-b+n)}{\Gamma(e+n)\Gamma(d+e-a-b)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a,d-b,-n\\d,d+e-a-b\end{matrix};1\right]\\ &=\frac{(d+e-a-b)_n}{(e)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a,d-b,-n\\d,d+e-a-b\end{matrix};1\right] \end{aligned} $$

ここで、$d\mapsto c,\quad e\mapsto d$ とすれば定理を得る。 □

補題 4.1.

$$ f=\frac{d(c-a-1)}{d-a} $$

としたとき、

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,1+d,-n\\c,d\end{matrix};1\right]=\frac{(c-a-1,1+f)_n}{(c,f)_n} $$

証明. 定理 4.3 より、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,1+d,-n\\d,c\end{matrix};1\right]&=\frac{(c-a-1)_n}{(c)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a,-1,-n\\d,c-a-1\end{matrix};1\right]\\ &=\frac{(c-a-1)_n}{(c)_n}\sum_{k=0}^{1}\frac{(d-a,-1,-n)_k}{(d,c-a-1)_k k!}\\ &=\frac{(c-a-1)_n}{(c)_n}\left(1+\frac{(d-a)n}{d(c-a-1)}\right)\\ &=\frac{(c-a-1)_n}{(c)_n}\left(1+\frac{n}{f}\right)\\ &=\frac{(c-a-1,1+f)_n}{(c,f)_n} \end{aligned} $$

□

次の定理は Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式の一般化である。

定理 4.4. 一般化 Kummer の変換公式

$$ f=\frac{d(c-a-1)}{d-a} $$

としたとき、

$$ {}_2F_2\left[\begin{matrix}a,1+d\\c,d\end{matrix};z\right]=e^z{}_2F_2\left[\begin{matrix}c-a-1,1+f\\c,f\end{matrix};-z\right] $$

証明.

$$\begin{aligned}
e^{-z}{}_2F_2\left[\begin{matrix}a,1+d\\c,d\end{matrix};z\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(a,1+d)_k}{(c,d)_k k!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,1+d,-n)_k}{(c,d)_k k!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,1+d,-n\\c,d\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

ここで、補題 4.1 より、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,1+d,-n\\c,d\end{matrix};1\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\frac{(c-a-1,1+f)_n}{(c,f)_n}\\
&={}_2F_2\left[\begin{matrix}c-a-1,1+f\\c,f\end{matrix};-z\right]
\end{aligned}$$

よって、

$${}_2F_2\left[\begin{matrix}a,1+d\\c,d\end{matrix};z\right]=e^z{}_2F_2\left[\begin{matrix}c-a-1,1+f\\c,f\end{matrix};-z\right]$$

□

$c=1+d$ とすれば、$f=d$ となり、Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式が得られる。

4.2 Whipple の変換公式

前の章で証明した Whipple の変換公式は

$$\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,-n\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+a,1+a-d-e)_n}{(1+a-d,1+a-e)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e,-n\\1+a-b,1+a-c,d+e-n-a\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

というものであった。本節ではこの公式をもちいて、多くの変換公式を得る。
また、$a+b+c+1=d+e+f+n$ としたとき、

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,-n\\d,e,f\end{matrix};1\right]=\frac{(e-a,f-a)_n}{(e,f)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,d-b,d-c,-n\\d,1-n+a-e,1-n+a-f\end{matrix};1\right]$$

がなりたち、これも Whipple の変換公式といい、この式の証明も与える。

定理 4.5.

$$\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e\end{matrix};-1\right]\\
&=\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

証明. Whipple の変換公式で、$n \to \infty$ とすれば、

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} {}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+a, 1+a-d-e)_n}{(1+a-d, 1+a-e)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, d+e-n-a \end{matrix}; 1\right] \\
&{}_6F_5\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix}; -1\right] \\
&\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)} {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}$$

□

系 4.3.

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5 + \cdots = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}$$

証明.

$$\begin{aligned}
&1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5 + \cdots = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{5}{4}\right)_n}{\left(\frac{1}{4}\right)_n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{n!^5} \\
&= {}_6F_5\left[\begin{matrix} \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, 1, 1, 1, 1 \end{matrix}; -1\right]
\end{aligned}$$

ここで、定理 4.5 で、$a = b = c = d = e = \frac{1}{2}$ として、

$$\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix} \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, 1, 1, 1, 1 \end{matrix}; -1\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1, 1 \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4} \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}
\end{aligned}$$

□

定理 4.6.

$$\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} a, b, c, d, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{\left(1+a, 1+\frac{a}{2}-d\right)_n}{\left(1+\frac{a}{2}, 1+a-d\right)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{a}{2}, d, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, d-n-\frac{a}{2} \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}$$

証明. Whipple の変換公式で、$e=\frac{a}{2}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,\frac{a}{2},-n\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+\frac{a}{2},1+a+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\left(1+a,1+\frac{a}{2}-d\right)_n}{\left(1+a-d,1+\frac{a}{2}\right)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,\frac{a}{2},-n\\ 1+a-b,1+a-c,d-n-\frac{a}{2}\end{matrix};1\right]\\
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d,-n\\ 1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\left(1+a,1+\frac{a}{2}-d\right)_n}{\left(1+\frac{a}{2},1+a-d\right)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},d,-n\\ 1+a-b,1+a-c,d-n-\frac{a}{2}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 4.7.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,d\\ 1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-d\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},d\\ 1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]
$$

証明. 定理 4.5 で、$e=\frac{a}{2}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,\frac{a}{2}\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+\frac{a}{2}\end{matrix};-1\right]\\
&=\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-d\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,\frac{a}{2}\\ 1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]\\
&{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,d\\ 1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};-1\right]\\
&=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-d\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},d\\ 1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

系 4.4.

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac12,\frac12,\frac12,\frac12\\ 1,1,1\end{matrix};-1\right]&=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma\left(\frac34\right)^2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac12,\frac12,\frac14\\ 1,1\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{8}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac14\right)^2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac34,\frac34,\frac34\\ \frac54,\frac54\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 4.7 で、$a=b=c=d=\frac12$ とおいて、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac12,\frac12,\frac12,\frac12\\ 1,1,1\end{matrix};-1\right]&=\frac{\Gamma\left(\frac54\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac32\right)\Gamma\left(\frac34\right)}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac12,\frac12,\frac14\\ 1,1\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\Gamma\left(\frac14\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac34\right)}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac12,\frac12,\frac14\\ 1,1\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma\left(\frac34\right)^2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac12,\frac12,\frac14\\ 1,1\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、定理 3.3 より、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,1\end{matrix};1\right] &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\\\frac{5}{4},\frac{5}{4}\end{matrix};1\right]\\
&= \frac{16\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\\\frac{5}{4},\frac{5}{4}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,1,1\end{matrix};-1\right] &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}\frac{16\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\\\frac{5}{4},\frac{5}{4}\end{matrix};1\right]\\
&= \frac{8\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\\\frac{5}{4},\frac{5}{4}\end{matrix};1\right]\\
&= \frac{8}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\\\frac{5}{4},\frac{5}{4}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

系 4.5.

$$\beta(3) = \frac{\pi^3}{32}$$

証明.

$$\beta(3) = {}_4F_3\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};-1\right]$$

ここで、定理 4.7 より、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};-1\right] &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)\Gamma(2)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};1\right]\\
&= \frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\\
&= \frac{\pi}{4}\frac{\pi^2}{8}\\
&= \frac{\pi^3}{32}
\end{aligned}
$$

□

定理 4.8.

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-1\right] = 2^{-a}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]$$

証明. 定理 4.7 で、$d = \frac{1+a}{2}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c,\frac{1+a}{2}\end{matrix};-1\right] &= \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]\\
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-1\right] &= \frac{2^{-a}\sqrt{\pi}\Gamma(1+a)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1+a)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]\\
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-1\right] &= 2^{-a}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

系 4.6. Ramanujan の等式

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\cdots=\frac{\pi}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)^2\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)^2}$$

証明.

$$\begin{aligned}1-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\cdots&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{n!^3}\\&={}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,1\end{matrix};-1\right]\end{aligned}$$

ここで、定理 4.8 と系 3.12 より、

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,1\end{matrix};-1\right]&=2^{-1/2}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4}\\1,1\end{matrix};1\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)^2\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)^2}\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)^2\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)^2}\end{aligned}$$

□

系 4.7.

$$\beta(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{(2n+1)^2\binom{2n}{n}}$$

証明.

$$\beta(2)={}_3F_2\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};-1\right]$$

ここで、定理 4.8 より、

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};-1\right]&=2^{-1}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2},1\\\frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{matrix};1\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!^2\left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n^2n!}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!(2n+1)}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}n!^2}{(2n+1)^2(2n)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{(2n+1)^2\binom{2n}{n}}\end{aligned}$$

□

定理 4.9. Whipple の ${}_4F_3$ 変換公式

$1+a+b+c=d+e+f+n$ としたとき、

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,-n\\d,e,f\end{matrix};1\right]=\frac{(e-a,f-a)_n}{(e,f)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,d-b,d-c,-n\\d,1-n+a-e,1-n+a-f\end{matrix};1\right]$$

証明. $c-a-b=f-d-e$ のとき、Euler の変換公式より、

$$(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}d,e\\f\end{matrix};z\right]=(1-z)^{f-d-e}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}f-d,f-e\\f\end{matrix};z\right]$$
$${}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}d,e\\f\end{matrix};z\right]={}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}f-d,f-e\\f\end{matrix};z\right]$$

ここで、両辺の z の係数を比較して、

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(c-a,c-b)_k}{(c)_kk!}\frac{(d,e)_{n-k}}{(f)_{n-k}(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,b)_k}{(c)_kk!}\frac{(f-d,f-e)_{n-k}}{(f)_{n-k}(n-k)!}$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(c-a,c-b,1-n-f,-n)_k}{(c,1-n-d,1-n-e)_kk!}=\frac{(f-d,f-e)_n}{(d,e)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,b,1-n-f,-n)_k}{(c,1-n+d-f,1-n+e-f)_kk!}$$
$${}_4F_3\left[\begin{matrix}c-a,c-b,1-n-f,-n\\c,1-n-d,1-n-e\end{matrix};1\right]=\frac{(f-d,f-e)_n}{(d,e)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,1-n-f,-n\\c,1-n+d-f,1-n+e-f\end{matrix};1\right]$$

ここで、$a\to c-a,\quad b\to c-b,\quad d\to 1-n-d,\quad e\to 1-n-e,\quad f\to 1-n-f$ とすれば、

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,f,-n\\c,d,e\end{matrix};1\right]=\frac{(d-f,e-f)_n}{(1-n-d,1-n-e)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}c-a,c-b,f,-n\\c,1-n+f-d,1-n+f-e\end{matrix};1\right]$$
$${}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,f,-n\\c,d,e\end{matrix};1\right]=\frac{(d-f,e-f)_n}{(d,e)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}c-a,c-b,f,-n\\c,1-n+f-d,1-n+f-e\end{matrix};1\right]$$

ここで、$a\mapsto c,\quad c\mapsto d,\quad d\mapsto e,\quad e\mapsto f,\quad f\mapsto a$ とすれば、定理を得る。 □

定理 4.10.

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\c,d\end{matrix};1\right]=\frac{(d-a)_n}{(d)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,c-b,-n\\c,1-n+a-d\end{matrix};1\right]$$

証明. Whipple の ${}_4F_3$ 変換公式より、$1+a+b+c=d+e+f+n$ のとき、

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,-n\\d,e,f\end{matrix};1\right]=\frac{(e-a,f-a)_n}{(e,f)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,d-b,d-c,-n\\d,1-n+a-e,1-n+a-f\end{matrix};1\right]$$

このとき、$f=a+b+c-d-e-n+1$ より、$s=a+b-d-e-n+1$ として、$f=s+c$ であるから、c,f 以外を固定して、$c\to\infty$ とすれば、

$$\lim_{c\to\infty}{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,-n\\d,e,s+c\end{matrix};1\right]=\lim_{c\to\infty}\frac{(e-a,s+c-a)_n}{(e,s+c)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,d-b,d-c,-n\\d,1-n+a-e,1-n+a-s-c\end{matrix};1\right]$$
$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\d,e\end{matrix};1\right]=\frac{(e-a)_n}{(e)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,d-b,-n\\d,1-n+a-e\end{matrix};1\right]$$

ここで、$d\to c,\quad e\to d$ とすれば、定理を得る。 □

4.3 Nearly-poised 超幾何級数の変換公式

well-poised と一つだけ値が違っている超幾何級数を nearly-poised という。本節では nearly-poised な超幾何級数の変換公式を証明する。
以下が基本的である。

定理 4.11.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,-n\\1+a-b,1+a-c,w\end{matrix};1\right]=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n\\1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
$$

証明. 定理 3.9 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,-n\\1+a-b,1+a-c,w\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,-n)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c,w)_k k!}(-1)^k{}_2F_1\left[\begin{matrix}a+2k,k-n\\w+k\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,-n)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c,w)_k k!}(-1)^k\frac{(w-a-k)_{n-k}}{(w+k)_{n-k}}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,-n)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c,w)_k k!}(-1)^n(1-n+2k+a-w)_{n-k}\frac{(w)_k}{(w)_n}\\
&=\frac{(-1)^n}{(w)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,-n)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}\frac{(1-n+a-w)_{n+k}}{(1-n+a-w)_{2k}}\\
&=\frac{(-1)^n(1-n+a-w)_n}{(w)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,-n)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}\frac{(1+a-w)_k}{(1-n+a-w)_{2k}}\\
&=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,1+a-w,-n)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c)_k(1-n+a-w)_{2k}k!}\\
&=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n\right)_k}{\left(1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\right)_k k!}\\
&=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n\\1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 4.12.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\1+a-b,w\end{matrix};1\right]=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,1+a-w,-n\\1+a-b,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
$$

証明. 定理 4.11 において、$c=\frac{1+a}{2}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,\frac{1+a}{2},-n\\1+a-b,\frac{1+a}{2},w\end{matrix};1\right]&=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}-b,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n\\1+a-b,\frac{1+a}{2},\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]\\
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\1+a-b,w\end{matrix};1\right]&=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}-b,\frac{a}{2},1+a-w,-n\\1+a-b,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

系 4.8.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},-n\\\frac{a}{2},w\end{matrix};1\right]=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}
$$

証明. 定理 4.12 において、$b=1+\frac{a}{2}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},-n\\\frac{a}{2},w\end{matrix};1\right]&=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},-\frac{1}{2},1+a-w,-n\\\frac{a}{2},\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2},1+a-w,-n\\\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、

$$-\frac{1}{2}+(1+a-w)-n+1=\frac{1+a-w-n}{2}+\left(1+\frac{a-w-n}{2}\right)$$

であるから、Saalschützの和公式より、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2},1+a-w,-n\\ \frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]&=\frac{\left(1+\frac{a-w-n}{2},\frac{w-a-n-1}{2}\right)_n}{\left(\frac{1+a-w-n}{2},\frac{w-a-n}{2}\right)_n}\\
&=\frac{\left(1+\frac{a-w-n}{2}\right)_n}{\left(\frac{1+a-w-n}{2}\right)_n}\frac{\left(\frac{w-a-n-1}{2}\right)_n}{\left(\frac{w-a-n}{2}\right)_n}\\
&=\frac{\left(\frac{w-a-n}{2}\right)_n}{\left(\frac{1+w-a-n}{2}\right)_n}\frac{\left(\frac{w-a-n-1}{2}\right)_n}{\left(\frac{w-a-n}{2}\right)_n}\\
&=\frac{\left(\frac{w-a-n-1}{2}\right)_n}{\left(\frac{1+w-a-n}{2}\right)_n}\\
&=\frac{w-a-n-1}{w-a+n-1}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},-n\\ \frac{a}{2},w\end{matrix};1\right]&=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}\frac{w-a-n-1}{w-a+n-1}\\
&=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}
\end{aligned}$$

□

系 4.9.

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\ 1+a-b,1+2b-n\end{matrix};1\right]=\frac{\left(a-2b,1+\frac{a}{2}-b,-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{a}{2}-b,-2b\right)_n}$$

証明. 定理 4.12 において、$w=1+2b-n$ とすると、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\ 1+a-b,1+2b-n\end{matrix};1\right]&=\frac{(1+2b-n-a)_n}{(1+2b-n)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,a-2b+n,-n\\ 1+a-b,\frac{a}{2}-b,\frac{1+a}{2}-b\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(a-2b)_n}{(-2b)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},a-2b+n,-n\\ 1+a-b,\frac{a}{2}-b\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{a}{2}+(a-2b+n)-n+1=(1+a-b)+\left(\frac{a}{2}-b\right)$$

であるから、Saalschützの和公式より、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},a-2b+n,-n\\ 1+a-b,\frac{a}{2}-b\end{matrix};1\right]&=\frac{\left(1+\frac{a}{2}-b,1-n+b\right)_n}{\left(1+a-b,1-n-\frac{a}{2}+b\right)_n}\\
&=\frac{\left(1+\frac{a}{2}-b,-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{a}{2}-b\right)_n}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\ 1+a-b,1+2b-n\end{matrix};1\right]&=\frac{(a-2b)_n}{(-2b)_n}\frac{\left(1+\frac{a}{2}-b,-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{a}{2}-b\right)_n}\\
&=\frac{\left(a-2b,1+\frac{a}{2}-b,-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{a}{2}-b,-2b\right)_n}
\end{aligned}$$

□

定理 4.13.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, -n \\ 1+a-b, w \end{matrix}; -1\right] = \frac{(w-a)_n}{(w)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+a-w, -n \\ 1+a-b, \frac{1+a-w-n}{2}, 1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix}; 1\right]
$$

証明. 定理 4.11 において、$c \to \infty$ とすると、

$$
\lim_{c\to\infty} {}_4F_3\left[\begin{matrix} a, b, c, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, w \end{matrix}; 1\right] = \lim_{c\to\infty} \frac{(w-a)_n}{(w)_n} {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+a-w, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, \frac{1+a-w-n}{2}, 1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix}; 1\right]
$$
$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, -n \\ 1+a-b, w \end{matrix}; -1\right] = \frac{(w-a)_n}{(w)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+a-w, -n \\ 1+a-b, \frac{1+a-w-n}{2}, 1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix}; 1\right]
$$

□

先ほどの系を用いれば以下の変換公式ができる。

定理 4.14.

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, w \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n} {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, 1+a-w, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+\frac{a-w-n}{2}, 1+\frac{1+a-w-n}{2} \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 3.9 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, w \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1+a-b-c, 1+\frac{a}{2}, -n\right)_k (a)_{2k}}{\left(1+a-b, 1+a-c, \frac{a}{2}, w\right)_k k!} (-1)^k {}_3F_2\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, k-n \\ \frac{a}{2}+k, w+k \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、系 4.8 より、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, k-n \\ \frac{a}{2}+k, w+k \end{matrix}; 1\right] &= \frac{(w-a-n-1)(w-a-k)_{n-k-1}}{(w+k)_{n-k}} \\
&= \frac{(-1)^{n-k-1}(w-a-n-1)}{(w)_n}(w)_k(2+a-w-n+2k)_{n-k-1} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(w-a-n-1)}{(w)_n}\frac{(-1)^k(w)_k(2+a-w-n)_{n+k-1}}{(2+a-w-n)_{2k}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(w-a-n-1)(2+a-w-n)_{n-1}}{(w)_n}\frac{(-1)^k(w, 1+a-w)_k}{(2+a-w-n)_{2k}} \\
&= \frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}\frac{(-1)^k(w, 1+a-w)_k}{(2+a-w-n)_{2k}}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, w \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1+a-b-c, 1+\frac{a}{2}, -n\right)_k (a)_{2k}}{\left(1+a-b, 1+a-c, \frac{a}{2}, w\right)_k k!} (-1)^k \frac{(-1)^k (w, 1+a-w)_k}{(2+a-w-n)_{2k}} \\
&= \frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1+a-b-c, 1+\frac{a}{2}, 1+a-w, -n\right)_k (a)_{2k}}{\left(1+a-b, 1+a-c, \frac{a}{2}\right)_k (2+a-w-n)_{2k} k!} \\
&= \frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1+a-b-c, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, 1+a-w, -n\right)_k}{\left(1+a-b, 1+a-c, 1+\frac{a-w-n}{2}, 1+\frac{1+a-w-n}{2}\right)_k k!} \\
&= \frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n} {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, 1+a-w, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+\frac{a-w-n}{2}, 1+\frac{1+a-w-n}{2} \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

□

well-poised にしたのが以下である。

定理 4.15.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a, b, c, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] = \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, \frac{1}{2}-n \end{matrix}; 1\right]
$$

証明. 定理 4.11 において、$w = 1+a+n$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a, b, c, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] &= \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n} {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, -n, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, -n, \frac{1}{2}-n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, \frac{1}{2}-n \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

□

ここで、$n \to \infty$ とすれば、定理 4.8 を得る。

定理 4.16.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, -n \\ 1+a-b, 1+a+n \end{matrix}; -1\right] = \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, -n \\ 1+a-b, \frac{1}{2}-n \end{matrix}; 1\right]
$$

証明. 定理 4.13 において、$w = 1+a+n$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, -n \\ 1+a-b, 1+a+n \end{matrix}; -1\right] &= \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, -n, -n \\ 1+a-b, -n, \frac{1}{2}-n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, -n \\ 1+a-b, \frac{1}{2}-n \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

□

4.4 超幾何級数の積

この節では超幾何級数の積についての等式を証明する。これらはすべて係数比較により証明する。

定理 4.17.

$$ {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};z\right]{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\b\end{matrix};z\right]={}_2F_3\left[\begin{matrix}\frac{a+b-1}{2},\frac{a+b}{2}\\a,b,a+b-1\end{matrix};4z\right] $$

証明.

$$ \begin{aligned} {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};z\right]{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\b\end{matrix};z\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(a)_k k!}\frac{1}{(b)_{n-k}(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(b)_n n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-n-b,-n)_k}{(a)_k k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(b)_n n!}{}_2F_1\left[\begin{matrix}1-n-b,-n\\a\end{matrix};1\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(b)_n n!}\frac{(a+b+n-1)_n}{(a)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b-1)_{2n}z^n}{(a,b,a+b-1)_n n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a+b-1}{2},\frac{a+b}{2}\right)_n 2^{2n}z^n}{(a,b,a+b-1)_n n!} \\ &= {}_2F_3\left[\begin{matrix}\frac{a+b-1}{2},\frac{a+b}{2}\\a,b,a+b-1\end{matrix};4z\right] \end{aligned} $$

□

系 4.10.

$$ {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};z\right]^2={}_1F_2\left[\begin{matrix}a-\frac{1}{2},\\a,2a-1\end{matrix};4z\right] $$

証明. 定理 4.17 で、$a=b$ とすれば、

$$ \begin{aligned} {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};z\right]^2 &= {}_2F_3\left[\begin{matrix}a-\frac{1}{2},a\\a,a,2a-1\end{matrix};4z\right] \\ &= {}_1F_2\left[\begin{matrix}a-\frac{1}{2}\\a,2a-1\end{matrix};4z\right] \end{aligned} $$

□

系 4.11.

$$ \left(1+\frac{x}{1!^2}+\frac{x^2}{2!^2}+\frac{x^3}{3!^2}+\cdots\right)^2=1+\frac{2!x}{1!^4}+\frac{4!x^2}{2!^4}+\frac{6!x^3}{3!^4}+\cdots $$

証明. 系 4.10 で、$a=1$ とおけば、

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{1!^2}+\frac{x^2}{2!^2}+\frac{x^3}{3!^2}+\cdots\right)^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!^2}\right)^2\\ &= {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\1\end{matrix};x\right]^2\\ &= {}_1F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\\1,1\end{matrix};4x\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!^3}(4x)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^4}(4x)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^4}x^n\\ &= 1+\frac{2!x}{1!^4}+\frac{4!x^2}{2!^4}+\frac{6!x^3}{3!^4}+\cdots\end{aligned}$$

□

定理 4.18.

$$ {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};z\right]{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};-z\right] = {}_0F_3\left[\begin{matrix}-\\a,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\end{matrix};-\frac{z^2}{4}\right]$$

証明.

$$ {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};-z\right]{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};z\right] = \sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(a)_k k!}\frac{1}{(a)_{n-k}(n-k)!}$$

ここで、左辺は偶関数より、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(a)_k k!}\frac{1}{(a)_{n-k}(n-k)!} &= \sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{(a)_k k!}\frac{1}{(a)_{2n-k}(2n-k)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(a)_{2n}(2n)!}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k(1-2n-a,-2n)_k}{(a)_k k!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(a)_{2n}(2n)!}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-2n,1-2n-a\\a\end{matrix};-1\right]\end{aligned}$$

ここで、Kummer の定理より、

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-2n,1-2n-a\\a\end{matrix};-1\right] &= \lim_{x\to-2n}\frac{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(1+x)}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+n)}\\ &= (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(a)_n}\\ &= (-1)^n\frac{(2n)!}{(a)_n n!}\end{aligned}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};z\right]{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};-z\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(a)_{2n}(2n)!}(-1)^n\frac{(2n)!}{(a)_n n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(a)_{2n}(a)_n n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n}\left(a,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\right)_n n!}\\
&= {}_0F_3\left[\begin{matrix}-\\a,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\end{matrix};-\frac{z^2}{4}\right]
\end{aligned}
$$

□

系 4.12.

$$\cos x\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(4n)!}x^{4n}$$

証明. 定理 4.18 において、$a=\frac{1}{2},\quad z=\frac{x^2}{4}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2}\end{matrix};\frac{x^2}{4}\right]{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2}\end{matrix};-\frac{x^2}{4}\right] &= {}_0F_3\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4}\end{matrix};-\frac{x^4}{4^3}\right]\\
\cos x\cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)_n n!}\left(-\frac{x^4}{4^3}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{4^{4n}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)_n n!}(-x^4)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(4n)!}x^{4n}
\end{aligned}
$$

□

系 4.13.

$$\sin x\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(4n+2)!}x^{4n+2}$$

証明. 定理 4.18 において、$a = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{x^2}{4}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; \frac{x^2}{4}\right] {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; -\frac{x^2}{4}\right] &= {}_0F_3\left[\begin{matrix}-\\ \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\end{matrix}; -\frac{x^4}{4^3}\right] \\
x{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; \frac{x^2}{4}\right] \cdot x{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; -\frac{x^2}{4}\right] &= x^2{}_0F_3\left[\begin{matrix}-\\ \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\end{matrix}; -\frac{x^4}{4^3}\right] \\
\sin x \sinh x &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)_n n!} \left(-\frac{x^4}{4^3}\right)^n \\
&= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^{4n}\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)_n n!} (-x^4)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(3)_{4n}} x^{4n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(4n+2)!} x^{4n+2}
\end{aligned}
$$

□

定理 4.19.

$$
{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\ c\end{matrix}; z\right] {}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\ c\end{matrix}; -z\right] = {}_2F_3\left[\begin{matrix}a, c-a\\ c, \frac{c}{2}, \frac{1+c}{2}\end{matrix}; \frac{z^2}{4}\right]
$$

証明.

$$
{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\ c\end{matrix}; -z\right] {}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\ c\end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (a)_k}{(c)_k k!} \frac{(a)_{n-k}}{(c)_{n-k}(n-k)!}
$$

ここで、左辺は偶関数より、

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (a)_k}{(c)_k k!} \frac{(a)_{n-k}}{(c)_{n-k}(n-k)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k (a)_k}{(c)_k k!} \frac{(a)_{2n-k}}{(c)_{2n-k}(2n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{2n}}{(c)_{2n}(2n)!} z^{2n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(a, 1-2n-c, -2n)_k}{(c, 1-2n-a)_k k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{2n}}{(c)_{2n}(2n)!} z^{2n} {}_3F_2\left[\begin{matrix}-2n, a, 1-2n-c\\ 1-2n-a, c\end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、Dixon の恒等式より、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-2n, a, 1-2n-c\\ 1-2n-a, c\end{matrix}; 1\right] &= \lim_{x \to -2n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(1+x)} \frac{\Gamma(1-2n-a)\Gamma(c)\Gamma(c-a+n)}{\Gamma(1-n-a)\Gamma(c+n)\Gamma(c-a)} \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{(c-a)_n}{(1-2n-a)_n (c)_n} \\
&= \frac{(2n)!}{n!} \frac{(c-a)_n}{(a+n)_n (c)_n} \\
&= \frac{(2n)!}{n!} \frac{(a, c-a)_n}{(a)_{2n} (c)_n}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\c\end{matrix};z\right]{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\c\end{matrix};-z\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2n}}{(c)_{2n}(2n)!}z^{2n}\frac{(2n)!}{n!}\frac{(a,c-a)_n}{(a)_{2n}(c)_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,c-a)_n}{(c)_n(c)_{2n}n!}z^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,c-a)_n}{2^{2n}\left(c,\frac{c}{2},\frac{1+c}{2}\right)n!}z^{2n} \\
&= {}_2F_3\left[\begin{matrix}a,c-a\\c,\frac{c}{2},\frac{1+c}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{4}\right]
\end{aligned}
$$

□

系 4.14.

$$
{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\2a\end{matrix};z\right]^2 = e^z{}_1F_2\left[\begin{matrix}a,\\2a,\frac{1}{2}+a\end{matrix};\frac{z^2}{4}\right]
$$

証明. 定理 4.19 において、$c=2a$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\2a\end{matrix};z\right]{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\2a\end{matrix};-z\right] &= {}_2F_3\left[\begin{matrix}a,a\\2a,a,\frac{1}{2}+a\end{matrix};\frac{z^2}{4}\right] \\
&= {}_1F_2\left[\begin{matrix}a\\2a,\frac{1}{2}+a\end{matrix};\frac{z^2}{4}\right]
\end{aligned}
$$

ここで、Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式より、

$$
{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\2a\end{matrix};-z\right] = e^{-z}{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\2a\end{matrix};z\right]
$$

よって、

$$
e^{-z}{}_1F_1\left[\begin{matrix}a\\2a\end{matrix};z\right]^2 = {}_1F_2\left[\begin{matrix}a\\2a,\frac{1}{2}+a\end{matrix};\frac{z^2}{4}\right]
$$

□

系 4.15.

$$
\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^3}x^n\right)^2 = e^{4x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^4}x^{2n}
$$

証明. 系 4.14 において、$a=\frac{1}{2},\quad z=4x$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
{}_1F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\\1\end{matrix};4x\right]^2 &= e^{4x}{}_1F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}\\1,1\end{matrix};4x^2\right] \\
\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!^2}(4x)^n\right)^2 &= e^{4x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!^3}(4x^2)^n \\
\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^3}x^n\right)^2 &= e^{4x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^4}x^{2n}
\end{aligned}
$$

□

定理 4.20.

$$
{}_0F_2\left[\begin{matrix} - \\ a, b \end{matrix}; z\right] {}_0F_2\left[\begin{matrix} - \\ a, b \end{matrix}; -z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a+b-1)_{3n} z^{2n}}{(a,b)_n (a,b,a+b-1)_{2n} n!}
$$

証明.

$$
{}_0F_2\left[\begin{matrix} - \\ a, b \end{matrix}; -z\right] {}_0F_2\left[\begin{matrix} - \\ a, b \end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(a,b)_k k!} \frac{1}{(a,b)_{n-k}(n-k)!}
$$

ここで、左辺は偶関数より、

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(a,b)_k k!} \frac{1}{(a,b)_{n-k}(n-k)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(a,b)_k k!} \frac{1}{(a,b)_{2n-k}(2n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(a,b)_{2n}(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(1-2n-a, 1-2n-b, -2n)_k}{(a,b)_k k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(a,b)_{2n}(2n)!} {}_3F_2\left[\begin{matrix} -2n, 1-2n-a, 1-2n-b \\ a, b \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、Dixon の恒等式より、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix} -2n, 1-2n-a, 1-2n-b \\ a, b \end{matrix}; 1\right] &= \lim_{x \to -2n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(1+x)} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b+3n-1)}{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(a+b+2n-1)} \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{(a+b-1)_{3n}}{(a,b)_n (a+b-1)_{2n}}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_0F_2\left[\begin{matrix} - \\ a, b \end{matrix}; -z\right] {}_0F_2\left[\begin{matrix} - \\ a, b \end{matrix}; z\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(a,b)_{2n}(2n)!} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{(a+b-1)_{3n}}{(a,b)_n (a+b-1)_{2n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a+b-1)_{3n}}{(a,b)_n (a,b,a+b-1)_{2n} n!} z^{2n}
\end{aligned}
$$

□

次は綺麗な等式である。

系 4.16.

$$
\left(1 + \frac{x}{1!^3} + \frac{x^2}{2!^3} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x}{1!^3} + \frac{x^2}{2!^3} - \cdots\right) = 1 - \frac{3!x^2}{1!^3 2!^3} + \frac{6!x^4}{2!^3 4!^3} - \frac{9!x^6}{3!^3 6!^3} + \cdots
$$

証明. 定理 4.20 で、$a = b = 1$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x}{1!^3} + \frac{x^2}{2!^3} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x}{1!^3} + \frac{x^2}{2!^3} - \cdots\right) &= {}_0F_2\left[\begin{matrix} - \\ 1, 1 \end{matrix}; x\right] {}_0F_2\left[\begin{matrix} - \\ 1, 1 \end{matrix}; -x\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1)_{3n}}{(1)_n^2 (1)_{2n}^3 n!} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n)!}{n!^3 (2n)!^3} x^{2n} \\
&= 1 - \frac{3!x^2}{1!^3 2!^3} + \frac{6!x^4}{2!^3 4!^3} - \frac{9!x^6}{3!^3 6!^3} + \cdots
\end{aligned}
$$

□

おわりに

Clausen の公式のように、重要だがこの PDF で扱っていない内容も多いので、また書きたいと思う。

参考文献

[1] W.N. Bailey - Generalized hypergeometric series, Cambridge University Press, 1935

[2] Bruce C. Berndt - Ramanujan's Notebooks Part II Springer-Verlag New York 1989