超幾何級数 I の定理集

@nkswtr

はじめに

このPDFは超幾何級数Iの定理を参照用にまとめたものである。

目次

第 1 章　特殊関数　3
1.1　ガンマ関数　3
1.2　ディガンマ関数　4
1.3　ゼータ関数　5
1.4　超幾何関数の定義　6
1.5　超幾何関数の例　8
1.6　二項定理　8

第 2 章　Gauss の超幾何関数　10
2.1　Euler 積分表示　10
2.2　変換公式　10
2.3　特殊値公式　12

第 3 章　一般の超幾何級数の和公式　13
3.1　${}_3F_2$ の和公式　13
3.2　Dougall の和公式　15
3.3　Karlsson-Minton の和公式　16

第 4 章　一般の超幾何級数の変換公式　17
4.1　Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式　17
4.2　Whipple の変換公式　18
4.3　Nearly-poised 超幾何級数の変換公式　19
4.4　超幾何級数の積　19

参考文献　21

第 1 章

特殊関数

1.1　ガンマ関数

定義 1.1. ガンマ関数を次で定義する。

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}$$

定理 1.1.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

系 1.1.

$$\Gamma(n+1) = n!$$

定義 1.2. ベータ関数を次で定義する

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

定理 1.2.

$$\mathrm{B}(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1} x \cos^{2b-1} x\,dx$$

定理 1.3.

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a+1,b-1), \quad a,b>1$$

補題 1.1.

$$\mathrm{B}(a,n+1) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(a+k)}$$

定理 1.4. 第 2 種 Euler 積分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx, \quad Re(z)>0$$

定理 1.5. Weierstrass の乗積表示

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

ここで、γ は Euler の定数で、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$$

定理 1.6. ガンマ関数の相反公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

系 1.2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

系 1.3.

$$\lim_{x \to -2n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\Gamma(1+x)} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

定理 1.7.

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

定理 1.8. Legendre の倍角公式

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

定理 1.9. $\ln\Gamma(z)$ の漸近展開

$$\ln\Gamma(z) = \frac{\ln 2\pi}{2} + \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)(2k-1)z^{2k-1}} + O(z^{-2m})$$

定理 1.10. Stirling の公式

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}} = 1$$

定理 1.11.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

ならば、

$$\lim_{z \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(z+a_k)}{\Gamma(z+b_k)} = 1$$

定理 1.12. Gauss の乗法公式

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2-nz}\Gamma(nz)$$

1.2 ディガンマ関数

定義 1.3. ディガンマ関数を以下で定義する。

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

定義 1.4. z に対して、調和数を以下で定義する。

$$H_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}$$

定理 1.13.

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

定理 1.14.

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

定理 1.15.

$$\psi(z+1) = H_z - \gamma$$

定理 1.16. ディガンマ関数の相反公式

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot \pi z$$

定理 1.17.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \psi\left(z + \frac{k}{n}\right) = n(\psi(nz) - \ln n)$$

系 1.4.

$$\psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2\psi(2z) - 2\ln 2$$

系 1.5.

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2$$

定義 1.5. ディガンマ関数を n 回微分したもの、

$$\psi^{(n)}(z)$$

をポリガンマ関数という。

1.3 ゼータ関数

定義 1.6. Riemann ゼータ関数を次で定義する

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad Re(s) > 1$$

定理 1.18.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = (1 - 2^{-s})\zeta(s)$$

定理 1.19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

定義 1.7. Dirichlet ベータ関数を次で定義する

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}, \qquad Re(s) > 0$$

系 1.6.

$$\beta(1) = \frac{\pi}{4}$$

定義 1.8. Hurwitz ゼータ関数を次で定義する

$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}, \qquad Re(s) > 1$$

定理 1.20.

$$\zeta(s, x+1) = \zeta(s,x) - x^{-s}$$

定理 1.21. $n > 0$ のとき、

$$\psi^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} n! \zeta(n+1, z)$$

1.4 超幾何関数の定義

定義 1.9. 二重階乗の定義
自然数 n に対して、

$$0!! = 1!! = 1, \quad n!! = n \cdot (n-2)!!$$

と定義する。この漸化式を用いて負の奇数について、

$$(-1)!! = 1, \quad (-3)!! = -1$$

のように二重階乗が定義できる。

定義 1.10. n を自然数としたとき、a を底とする上昇 n 乗を

$$\prod_{k=0}^{n-1} (a+k) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$$

a を底とする下降 n 乗を

$$\prod_{k=0}^{n-1} (a-k) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$$

のように定義する。

定義 1.11. ポッホハマー記号を次で定義する

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k), \quad (a)_{-n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (a-k)}$$

$$(a_1, \ldots, a_r)_n = (a_1)_n \cdots (a_r)_n$$

と略記する

定理 1.22.

$$(a)_n = (-1)^n (1-n-a)_n \tag{1.1}$$

$$(a)_{-n} = \frac{(-1)^n}{(1-a)_n} \tag{1.2}$$

$$(a)_{n-k} = \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-n-a)_k} \tag{1.3}$$

$$(a)_{n+k} = (a)_n (a+n)_k \tag{1.4}$$

$$(a)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{a}{2}\right)_n \left(\frac{1+a}{2}\right)_n \tag{1.5}$$

$$\frac{(a+1)_n}{(a)_n} = \frac{a+n}{a} \tag{1.6}$$

$$(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} \tag{1.7}$$

定理 1.23.

$$\sum_{k=1}^{r} a_k = \sum_{k=1}^{r} b_k$$

ならば、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_r)_n} = \prod_{k=1}^{r} \frac{\Gamma(b_k)}{\Gamma(a_k)}$$

定義 1.12. 超幾何関数の定義

$${}_rF_s \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)_n n!} z^n$$

1.5 超幾何関数の例

定理 1.24.

$$e^x = {}_0F_0\left[\begin{matrix}-\\-\end{matrix};x\right] \tag{1.8}$$

$$\sinh x = x\,{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{3}{2}\end{matrix};\frac{x^2}{4}\right] \tag{1.9}$$

$$\cosh x = {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2}\end{matrix};\frac{x^2}{4}\right] \tag{1.10}$$

$$\sin x = x\,{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{3}{2}\end{matrix};-\frac{x^2}{4}\right] \tag{1.11}$$

$$\cos x = {}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\\frac{1}{2}\end{matrix};-\frac{x^2}{4}\right] \tag{1.12}$$

$$\ln(1+x) = x\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix};-x\right] \tag{1.13}$$

$$\arcsin x = x\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{matrix};x^2\right] \tag{1.14}$$

$$\arctan x = x\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{matrix};-x^2\right] \tag{1.15}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};k^2\right] \tag{1.16}$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\\1\end{matrix};k^2\right] \tag{1.17}$$

定理 1.25.

$$\zeta(n) = {}_{n+1}F_n\left[\begin{matrix}1,1,\dots,1\\2,\dots,2\end{matrix};1\right] \tag{1.18}$$

$$\beta(n) = {}_{n+1}F_n\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\\\frac{3}{2},\dots,\frac{3}{2}\end{matrix};-1\right] \tag{1.19}$$

$$\zeta(n,x) = x^{-n}\,{}_{n+1}F_n\left[\begin{matrix}1,x,\dots,x\\1+x,\dots,1+x\end{matrix};1\right] \tag{1.20}$$

定理 1.26.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}1,x\\1+x\end{matrix};-1\right] = \frac{x}{2}\left(\psi\left(\frac{1+x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

1.6 二項定理

定理 1.27. 二項定理

$${}_1F_0\left[\begin{matrix}a\\-\end{matrix};z\right] = (1-z)^{-a}$$

系 1.7.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

系 1.8.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

定理 1.28. Vandermonde の恒等式

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} b, -n \\ c \end{matrix}; 1\right] = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}$$

系 1.9.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

系 1.10.

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

系 1.11.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m}{k} = \binom{n+m}{n}$$

定理 1.29. 二項係数の反転公式

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = b_n$$

としたとき、

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k = a_n$$

第 2 章

Gauss の超幾何関数

次を Gauss の超幾何関数という。

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c)_n n!} z^n $$

2.1 Euler 積分表示

定理 2.1. Gauss の超幾何関数の Euler 積分表示

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}\, dx $$

定理 2.2. Gauss の超幾何定理

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad Re(c-a-b) > 0 $$

系 2.1.

$$ \frac{1}{x} + \frac{x}{1!(x+1)} + \frac{x(x+1)}{2!(x+2)} + \cdots = \frac{\pi}{\sin \pi x} $$

系 2.2.

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} = \frac{c-1}{c-a-1} $$

系 2.3.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} -\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2} \\ b+\frac{1}{2} \end{matrix}; 1\right] = \frac{2^n (b)_n}{(2b)_n} $$

系 2.4.

$$ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 + \cdots = \frac{4}{\pi} $$

2.2 変換公式

定理 2.3. Pfaff の変換公式

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right] = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix}; \frac{z}{z-1}\right] $$

系 2.5.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};z\right]=\frac{1}{\sqrt{1-z}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right] $$

定理 2.4. Euler の変換公式

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right]=(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};z\right] $$

系 2.6.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,c+n\\c\end{matrix};z\right]=(1-z)^{-n-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,-n\\c\end{matrix};z\right] $$

系 2.7.

$$ \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}x^{2n+1} $$

定理 2.5.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,-a\\\frac{1}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{z^2-1}\right]=\cosh\left(a\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\right) $$

定理 2.6. Kummer の二次の変換公式

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};2z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\b+\frac{1}{2}\end{matrix};\frac{z^2}{(1-z)^2}\right] $$

補題 2.1. $|z|>1$ ならば、

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\2a\end{matrix};\frac{1}{z}\right]^{-1} &= \left\{\sqrt[2]{1-\frac{1}{2z}}\sqrt[4]{1-\frac{1}{2(2z-1)^2}}\sqrt[8]{1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}}\cdots\right\}^{2a-1} \\ &\times\left(1-\frac{1}{2z}\right)\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)\cdots \end{aligned} $$

ここで、分母の数列は

$$ a_0=2z,\quad a_{n+1}=2(a_n-1)^2 $$

で定められるとする。

定理 2.7.

$$ \left(1-\frac{1}{2z}\right)\left(1-\frac{1}{2(2z-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}\right)\cdots=\sqrt{1-\frac{1}{z}} $$

定理 2.8.

$$ \sqrt{1-\frac{1}{2z}}\sqrt[4]{1-\frac{1}{2(2z-1)^2}}\sqrt[8]{1-\frac{1}{2(2(2z-1)^2-1)^2}}\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}\right) $$

定理 2.9.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\2a\end{matrix};z\right]=\frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a-1} $$

定理 2.10.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a\\1+2a\end{matrix};z\right]=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a} $$

2.3 特殊値公式

定理 2.11. Kummer の定理

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ 1+a-b \end{matrix}; -1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}
$$

系 2.8.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, -n \\ 1+a+n \end{matrix}; -1\right] = \frac{(1+a)_n}{\left(1+\frac{a}{2}\right)_n}
$$

系 2.9.

$$
\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n-k}\binom{2n}{k}^2 = \binom{2n}{n}
$$

系 2.10.

$$
1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2+\cdots = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}
$$

定理 2.12.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ \frac{1+a+b}{2} \end{matrix}; \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)}
$$

定理 2.13.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, 1-a \\ c \end{matrix}; \frac{1}{2}\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+c-a}{2}\right)}
$$

系 2.11.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}; \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}
$$

系 2.12.

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{54^n n!^3} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}
$$

定理 2.14.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2} \\ \frac{a}{3}+\frac{5}{6} \end{matrix}; \frac{1}{9}\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^a \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}(1+a)\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{a}{6}\right)}
$$

系 2.13.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \\ 1 \end{matrix}; \frac{1}{9}\right] = \frac{\sqrt{3\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}
$$

第 3 章

一般の超幾何級数の和公式

3.1　$_3F_2$ の和公式

定理 3.1. 超幾何級数の Euler 積分表示

$$_{r+1}F_{s+1}\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_{r+1}\\ b_1,\dots,b_{s+1}\end{matrix};z\right]=\frac{\Gamma(b_{s+1})}{\Gamma(a_{r+1})\Gamma(b_{s+1}-a_{r+1})}\int_0^1 x^{a_{r+1}-1}(1-x)^{b_{s+1}-a_{r+1}-1}{}_rF_s\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};zx\right]dx$$

定理 3.2. $s=d+e-a-b-c$ としたとき、

$$_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\ d,e\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(e-c)\Gamma(s+c)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a,d-b,c\\ d,s+c\end{matrix};1\right]$$

定理 3.3. $s=d+e-a-b-c$ としたとき、

$$_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\ d,e\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(s)}{\Gamma(a)\Gamma(s+b)\Gamma(s+c)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-a,e-a,s\\ s+b,s+c\end{matrix};1\right]$$

定理 3.4. Saalschütz の和公式

$$_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\ c,1-n+a+b-c\end{matrix};1\right]=\frac{(c-a,c-b)_n}{(c,c-a-b)_n}$$

系 3.1.

$$_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,a+n,-n\\ 1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]=\frac{(b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n}$$

系 3.2.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{k}\binom{c}{k}}{\binom{a+b+c}{k}}=\frac{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}{a!b!c!(a+b+c)!},\qquad a,b,c\in\mathbb{N}_0$$

系 3.3.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}^3}{\binom{3n}{k}}=\frac{(2n)!^3}{n!^3(3n)!}$$

定理 3.5. Kummer の二次の変換公式

$$_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ 1+a-b\end{matrix};z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\\ 1+a-b\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]$$

系 3.4.

$$_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix};z\right]=\frac{1}{\sqrt{1-z}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{4}\\ 1\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]$$

定理 3.6. Dixon の恒等式

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c \\ 1+a-b,1+a-c \end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)\Gamma(1+a-b-c)} $$

系 3.5.

$$ \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}, \quad a,b,c\in\mathbb{N}_0 $$

系 3.6.

$$ \sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n-k}\binom{2n}{k}^3 = \frac{(3n)!}{n!^3} $$

系 3.7.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,-n \\ 1+a-b,1+a+n \end{matrix};1\right] = \frac{\left(1+a,1+\frac{a}{2}-b\right)_n}{\left(1+\frac{a}{2},1+a-b\right)_n} $$

系 3.8.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},-n \\ \frac{a}{2},1+a+n \end{matrix};1\right] = \delta_{n,0} $$

ここで、$\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタといい、

$$ \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases} $$

のように定義される。

系 3.9.

$$ 1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\cdots = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4} $$

系 3.10. バーゼル問題

$$ \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} $$

系 3.11.

$$ 1+\frac{1}{2}\frac{1}{5^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{9^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{13^2}+\cdots = \frac{\sqrt{2\pi}}{32}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 $$

定理 3.7. Watson の和公式

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c \\ \frac{1+a+b}{2},2c \end{matrix};1\right] = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1-b}{2}+c\right)} $$

系 3.12.

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{2^{8n}n!^4} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)^2\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)^2} $$

系 3.13.

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!(3n)!}{108^n n!^5} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)^2} $$

定理 3.8. $a+b=1, \quad d+e=1+2c$ のとき、

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};1\right] = \frac{\pi\Gamma(d)\Gamma(e)}{2^{2c-1}\Gamma\left(\frac{a+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)} $$

3.2 Dougall の和公式

定理 3.9. 展開公式

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+4}F_{r+3}\left[\begin{matrix} a,b,c,a_1,\dots,a_r,-n \\ 1+a-b,1+a-c,b_1,\dots,b_{r+1}\end{matrix};z\right] \\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,a_1,\dots,a_r,-n)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c,b_1,\dots,b_{r+1})_k k!}(-z)^k{}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix} a+2k,a_1+k,\dots,a_r+k,k-n \\ b_1+k,\dots,b_{r+1}+k\end{matrix};z\right]
\end{aligned}
$$

補題 3.1.

$$
{}_5F_4\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c,-n \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a+n\end{matrix};1\right]=\frac{(1+a,1+a-b-c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n}
$$

定理 3.10. Whipple の変換公式

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,-n \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a+n\end{matrix};1\right] \\
&=\frac{(1+a,1+a-d-e)_n}{(1+a-d,1+a-e)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c,d,e,-n \\ 1+a-b,1+a-c,d+e-n-a\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

定理 3.11. Dougall の和公式

$1+2a+n=b+c+d+e$ であるとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,-n \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a+n\end{matrix};1\right] \\
&=\frac{(1+a,1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-c-d)_n}{(1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-b-c-d)_n}
\end{aligned}
$$

定理 3.12.

$$
{}_5F_4\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c,d \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)}
$$

系 3.14.

$$
1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\cdots=\frac{4}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}
$$

定理 3.13.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}
$$

系 3.15.

$$
1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\cdots=\frac{2}{\pi}
$$

系 3.16.

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2n}{a}\right)\frac{(a)_n^3}{n!^3}=\frac{\sin\pi a}{\pi a}
$$

定理 3.14.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma\left(1+a-c\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma(\frac{1+a}{2}-b-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}-c\right)}
$$

3.3 Karlsson-Minton の和公式

補題 3.2. $m < a$ のとき、m 次以下の多項式 $P(x)$ について、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)_n}{n!} P(n) = 0$$

補題 3.3. 最高次の係数が 1 の m 次の多項式 $P(x)$ について、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m)_n}{n!} P(n) = (-1)^m m!$$

定理 3.15. $\sum_{k=1}^{r} m_k < a$ のとき、

$${}_{r+1}F_r \left[\begin{matrix} -a, c_1 + m_1, \ldots, c_r + m_r \\ c_1, \ldots, c_r \end{matrix} ; 1 \right] = 0$$

定理 3.16.

$${}_{r+1}F_r \left[\begin{matrix} -(m_1 + \cdots + m_r), c_1 + m_1, \ldots, c_r + m_r \\ c_1, \ldots, c_r \end{matrix} ; 1 \right] = (-1)^{m_1 + \cdots + m_r} \frac{(m_1 + \cdots + m_r)!}{(c_1)_{m_1} \cdots (c_r)_{m_r}}$$

定理 3.17. Karlsson-Minton の和公式
$\sum_{k=1}^{r} m_k < 1 + a$ のとき、

$${}_{r+2}F_{r+1} \left[\begin{matrix} -a, b, c_1 + m_1, \ldots, c_r + m_r \\ 1 + b, c_1, \ldots, c_r \end{matrix} ; 1 \right] = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k - b)_{m_k}}{(c_k)_{m_k}}$$

第 4 章

一般の超幾何級数の変換公式

4.1　Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式

定理 4.1. Kummer の ${}_1F_1$ 変換公式

$$
{}_1F_1\left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix};z\right] = e^z\,{}_1F_1\left[\begin{matrix} c-a \\ c \end{matrix};-z\right]
$$

系 4.1.

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(a)_{n+1}} = e^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{(n+a)n!}
$$

定理 4.2.

$$
{}_1F_1\left[\begin{matrix} a \\ 2a \end{matrix};2z\right] = e^z\,{}_0F_1\left[\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}+a \end{matrix};\frac{z^2}{4}\right]
$$

定理 4.3.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,-n \\ c,d \end{matrix};1\right] = \frac{(c+d-a-b)_n}{(d)_n}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} c-a,c-b,-n \\ c,c+d-a-b \end{matrix};1\right]
$$

補題 4.1.

$$
f = \frac{d(c-a-1)}{d-a}
$$

としたとき、

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,1+d,-n \\ c,d \end{matrix};1\right] = \frac{(c-a-1,1+f)_n}{(c,f)_n}
$$

定理 4.4. 一般化 Kummer の変換公式

$$
f = \frac{d(c-a-1)}{d-a}
$$

としたとき、

$$
{}_2F_2\left[\begin{matrix} a,1+d \\ c,d \end{matrix};z\right] = e^z\,{}_2F_2\left[\begin{matrix} c-a-1,1+f \\ c,f \end{matrix};-z\right]
$$

4.2 Whipple の変換公式

定理 4.5.

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix}a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e\\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e\end{matrix}; -1\right]\\
&= \frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c, d, e\\ 1+a-b, 1+a-c\end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

系 4.2.

$$
1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5+\cdots=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}
$$

定理 4.6.

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a, b, c, d, -n\\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a+n\end{matrix}; 1\right]\\
&= \frac{\left(1+a, 1+\frac{a}{2}-d\right)_n}{\left(1+\frac{a}{2}, 1+a-d\right)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c, \frac{a}{2}, d, -n\\ 1+a-b, 1+a-c, d-n-\frac{a}{2}\end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

定理 4.7.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}a, b, c, d\\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d\end{matrix}; -1\right]=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-d\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c, \frac{a}{2}, d\\ 1+a-b, 1+a-c\end{matrix}; 1\right]
$$

系 4.3.

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ 1, 1, 1\end{matrix}; -1\right] &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\\ 1, 1\end{matrix}; 1\right]\\
&= \frac{8}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\\ \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

系 4.4.

$$
\beta(3)=\frac{\pi^3}{32}
$$

定理 4.8.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c\\ 1+a-b, 1+a-c\end{matrix}; -1\right]=2^{-a}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}\\ 1+a-b, 1+a-c\end{matrix}; 1\right]
$$

系 4.5. Ramanujan の等式

$$
1-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\cdots=\frac{\pi}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)^2\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)^2}
$$

系 4.6.

$$
\beta(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{(2n+1)^2\binom{2n}{n}}
$$

定理 4.9. Whipple の ${}_4F_3$ 変換公式

$1+a+b+c=d+e+f+n$ としたとき、

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}a, b, c, -n\\ d, e, f\end{matrix}; 1\right]=\frac{(e-a, f-a)_n}{(e, f)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}a, d-b, d-c, -n\\ d, 1-n+a-e, 1-n+a-f\end{matrix}; 1\right]
$$

定理 4.10.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\c,d\end{matrix};1\right]=\frac{(d-a)_n}{(d)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,c-b,-n\\c,1-n+a-d\end{matrix};1\right]
$$

4.3 Nearly-poised 超幾何級数の変換公式

定理 4.11.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,-n\\1+a-b,1+a-c,w\end{matrix};1\right]=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n\\1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
$$

定理 4.12.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\1+a-b,w\end{matrix};1\right]=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,1+a-w,-n\\1+a-b,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
$$

系 4.7.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},-n\\\frac{a}{2},w\end{matrix};1\right]=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}
$$

系 4.8.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\1+a-b,1+2b-n\end{matrix};1\right]=\frac{\left(a-2b,1+\frac{a}{2}-b,-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{a}{2}-b,-2b\right)_n}
$$

定理 4.13.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\1+a-b,w\end{matrix};-1\right]=\frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n\\1+a-b,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
$$

定理 4.14.

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,-n\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,w\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},1+a-w,-n\\1+a-b,1+a-c,1+\frac{a-w-n}{2},1+\frac{1+a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

定理 4.15.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,-n\\1+a-b,1+a-c,1+a+n\end{matrix};1\right]=\frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},-n\\1+a-b,1+a-c,\frac{1}{2}-n\end{matrix};1\right]
$$

定理 4.16.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,-n\\1+a-b,1+a+n\end{matrix};-1\right]=\frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},-n\\1+a-b,\frac{1}{2}-n\end{matrix};1\right]
$$

4.4 超幾何級数の積

定理 4.17.

$$
{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};z\right]{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\b\end{matrix};z\right]={}_2F_3\left[\begin{matrix}\frac{a+b-1}{2},\frac{a+b}{2}\\a,b,a+b-1\end{matrix};4z\right]
$$

系 4.9.

$$
{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};z\right]^2={}_1F_2\left[\begin{matrix}a-\frac{1}{2},\\a,2a-1\end{matrix};4z\right]
$$

系 4.10.

$$\left(1+\frac{x}{1!^2}+\frac{x^2}{2!^2}+\frac{x^3}{3!^2}+\cdots\right)^2=1+\frac{2!x}{1!^4}+\frac{4!x^2}{2!^4}+\frac{6!x^3}{3!^4}+\cdots$$

定理 4.18.

$${}_0F_1\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{a};z\right]{}_0F_1\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{a};-z\right]={}_0F_3\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{a,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}};-\frac{z^2}{4}\right]$$

系 4.11.

$$\cos x\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}}{(4n)!}x^{4n}$$

系 4.12.

$$\sin x\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}}{(4n+2)!}x^{4n+2}$$

定理 4.19.

$${}_1F_1\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{c};z\right]{}_1F_1\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{c};-z\right]={}_2F_3\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{a,c-a}{c,\frac{c}{2},\frac{1+c}{2}};\frac{z^2}{4}\right]$$

系 4.13.

$${}_1F_1\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{2a};z\right]^2=e^z{}_1F_2\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{a,}{2a,\frac{1}{2}+a};\frac{z^2}{4}\right]$$

系 4.14.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^3}x^n\right)^2=e^{4x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!^4}x^{2n}$$

定理 4.20.

$${}_0F_2\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{a,b};z\right]{}_0F_2\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{a,b};-z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(a+b-1)_{3n}z^{2n}}{(a,b)_n(a,b,a+b-1)_{2n}n!}$$

系 4.15.

$$\left(1+\frac{x}{1!^3}+\frac{x^2}{2!^3}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{1!^3}+\frac{x^2}{2!^3}-\cdots\right)=1-\frac{3!x^2}{1!^32!^3}+\frac{6!x^4}{2!^34!^3}-\frac{9!x^6}{3!^36!^3}+\cdots$$

参考文献

[1] W.N. Bailey - Generalized hypergeometric series, Cambridge University Press, 1935

[2] Bruce C. Berndt - Ramanujan's Notebooks Part II Springer-Verlag New York 1989