超幾何級数 II

@nkswtr

はじめに

この PDF は前に書いた超幾何級数についての PDF の続きである。超幾何関数の理論的な部分は含まれていないが、内容は少し高度になっていると思う。計算量がさらに多くなるので、計算になれている必要があると思う。

目次

第 1 章

超幾何級数の変換公式

1.1　${}_9F_8$ の変換公式

この節では、重要な ${}_9F_8$ の変換公式を証明する。${}_9F_8$ からはじまるのは少し抵抗があるかもしれないが、話の流れ上、これを最初に示す必要があるのである。

補題 1.1. $\lambda = 1 + 2a - b - c - d$ としたとき、

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left(\lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k (a)_{n+k}(a-\lambda)_{n-k}}{\left(\frac{\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d\right)_k (1+\lambda)_{n+k} k!} \\
&= \frac{(a,b,c,d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d)_n}
\end{aligned}$$

証明. Dougall の和公式

$$\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a, 1+a-b-c, 1+a-b-d, 1+a-c-d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-b-c-d)_n}, \quad 1+2a+n = b+c+d+e
\end{aligned}$$

において、$a \mapsto \lambda, \quad b \mapsto b+\lambda-a, \quad c \mapsto c+\lambda-a, \quad d \mapsto d+\lambda-a, \quad e \mapsto a+n$ とすると、条件は、

$$1 + 2\lambda + n = (b+\lambda-a) + (c+\lambda-a) + (d+\lambda-a) + (a+n)$$

より、

$$\lambda = 1 + 2a - b - c - d$$

である。このとき、

$$\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} \lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, a+n, -n \\ \frac{\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+\lambda-a-n, 1+\lambda+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+\lambda, b, c, d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, a-\lambda)_n} \\
&\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, a+n, -n)_k}{(\frac{\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+\lambda-a-n, 1+\lambda+n)_k k!} \\
&= \frac{(1+\lambda, b, c, d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, a-\lambda)_n}
\end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
&\frac{(a,b,c,d)_n}{(1+a-b,1+a-c,1+a-d)_n}\\
&=\frac{(a,a-\lambda)_n}{(1+\lambda)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda,1+\frac{\lambda}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,a+n,-n)_k}{(\frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+\lambda-a-n,1+\lambda+n)_k k!}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(\lambda,1+\frac{\lambda}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,-n)_k(a)_{n+k}(a-\lambda)_{n-k}}{(\frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d)_k(1+\lambda)_{n+k}k!}
\end{aligned}
$$

□

定理 1.1. $\lambda=1+2a-b-c-d$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+5}F_{r+4}\left[\begin{matrix}a,b,c,d,a_1,\dots,a_r,-n\\1+a-b,1+a-c,1+a-d,b_1,\dots,b_{r+1}\end{matrix};z\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,a_1,\dots,a_r,-n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2},\frac{1+\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,b_1,\dots,b_{r+1}\right)_k k!}z^k\\
&\times{}_{r+3}F_{r+2}\left[\begin{matrix}a+2k,a-\lambda,a_1+k,\dots,a_r+k,k-n\\1+\lambda+2k,b_1+k,\dots,b_{r+1}+k\end{matrix};z\right]
\end{aligned}
$$

証明. 補題 1.1 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+5}F_{r+4}\left[\begin{matrix}a,b,c,d,a_1,\dots,a_r,-n\\1+a-b,1+a-c,1+a-d,b_1,\dots,b_{r+1}\end{matrix};z\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1,\dots,a_r,-n)_k}{(b_1,\dots,b_{r+1})_k k!}z^k\frac{(a,b,c,d)_k}{(1+a-b,1+a-c,1+a-d)_k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1,\dots,a_r,-n)_k}{(b_1,\dots,b_{r+1})_k k!}z^k\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j\left(\lambda,1+\frac{\lambda}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,-k\right)_j(a)_{k+j}(a-\lambda)_{k-j}}{\left(\frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\right)_j(1+\lambda)_{k+j}j!}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{(a_1,\dots,a_r,-n)_k}{(b_1,\dots,b_{r+1})_k k!}z^k\frac{(-1)^j\left(\lambda,1+\frac{\lambda}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,-k\right)_j(a)_{k+j}(a-\lambda)_{k-j}}{\left(\frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\right)_j(1+\lambda)_{k+j}j!}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(a_1,\dots,a_r,-n)_{k+j}}{(b_1,\dots,b_{r+1})_{k+j}(k+j)!}z^{k+j}\\
&\times\frac{(-1)^j\left(\lambda,1+\frac{\lambda}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,-k-j\right)_j(a)_{k+2j}(a-\lambda)_k}{\left(\frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\right)_j(1+\lambda)_{k+2j}j!}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(a_1,\dots,a_r,-n)_j\left(\lambda,1+\frac{\lambda}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a\right)_j(a)_{2j}}{(b_1,\dots,b_{r+1})_j\left(\frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\right)_j(1+\lambda)_{2j}j!}z^j\\
&\times\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(a_1+j,\dots,a_r+j,j-n)_k}{(b_1+j,\dots,b_{r+1}+j)_k}z^k\frac{(a+2j)_k(a-\lambda)_k}{(1+\lambda+2j)_k k!}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(a_1,\dots,a_r,-n)_j\left(\lambda,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a\right)_j}{(b_1,\dots,b_{r+1})_j\left(\frac{\lambda}{2},\frac{1+\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\right)_j j!}z^j\\
&\times{}_{r+3}F_{r+2}\left[\begin{matrix}a+2j,a-\lambda,a_1+j,\dots,a_r+j,j-n\\1+\lambda+2j,b_1+j,\dots,b_{r+1}+j\end{matrix};z\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$j\mapsto k$ として、定理を得る。 □

定理 1.2. ${}_9F_8$ の変換公式
$\lambda = 1+2a-b-c-d, \quad 2+3a+n = b+c+d+e+f+g$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_9F_8\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, f, g, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a, 1+\lambda-e, 1+\lambda-f, 1+\lambda-g)_n}{(1+\lambda, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g)_n} \\
&\times {}_9F_8\left[\begin{matrix} \lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, e, f, g, -n \\ \frac{\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+\lambda-e, 1+\lambda-f, 1+\lambda-g, 1+\lambda+n \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 1.1 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_9F_8\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, f, g, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, e, f, g, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}, \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, 1+a+n\right)_k k!} \\
&\times {}_7F_6\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, e+k, f+k, g+k, a-\lambda, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+a-e+k, 1+a-f+k, 1+a-g+k, 1+\lambda+2k, 1+a+n+k \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, e, f, g, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, 1+a+n\right)_k k!} \\
&\times {}_7F_6\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, e+k, f+k, g+k, a-\lambda, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+a-e+k, 1+a-f+k, 1+a-g+k, 1+\lambda+2k, 1+a+n+k \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$2+3a+n = b+c+d+e+f+g$ より、

$$
1+2(a+2k)+(n-k) = (e+k)+(d+k)+(f+k)+(a-\lambda)
$$

であるから、Dougall の和公式より、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, e+k, f+k, g+k, a-\lambda, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+a-e+k, 1+a-f+k, 1+a-g+k, 1+\lambda+2k, 1+a+n+k \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+a+2k, 1+a-e-f, 1+a-e-g, 1+a-f-g)_{n-k}}{(1+a-e+k, 1+a-f+k, 1+a-g+k, 1+a-e-f-g-k)_{n-k}} \\
&= \frac{(1+a)_{n+k}}{(1+a)_{2k}} \frac{(1+a-e, 1+a-f, 1+a-g)_k}{(1+a-e, 1+a-f, 1+a-g)_n} \frac{(e-\lambda-n, f-\lambda-n, g-\lambda-n)_{n-k}}{(-\lambda-n-k)_{n-k}} \\
&= \frac{(1+a)_n(1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, 1+a+n)_k}{(1+a-e, 1+a-f, 1+a-g)_n(1+a)_{2k}} \frac{(1+\lambda-e+k, 1+\lambda-f+k, 1+\lambda-g+k)_{n-k}}{(1+\lambda+2k)_{n-k}} \\
&= \frac{(1+a)_n(1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, 1+a+n)_k}{(1+a-e, 1+a-f, 1+a-g)_n(1+a)_{2k}} \frac{(1+\lambda-e, 1+\lambda-f, 1+\lambda-g)_n(1+\lambda)_{2k}}{(1+\lambda-e, 1+\lambda-f, 1+\lambda-g)_k(1+\lambda)_{n+k}} \\
&= \frac{(1+a, 1+\lambda-e, 1+\lambda-f, 1+\lambda-g)_n}{(1+\lambda, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g)_n} \frac{\left(\frac{1+\lambda}{2}, 1+\frac{\lambda}{2}, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, 1+a+n\right)_k}{\left(\frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, 1+\lambda-e, 1+\lambda-f, 1+\lambda-g, 1+\lambda+n\right)_k}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_9F_8\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f,g,-n\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a-g,1+a+n\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,e,f,g,-n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2},\frac{1+\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a-g,1+a+n\right)_k k!}\\
&\times\frac{(1+a,1+\lambda-e,1+\lambda-f,1+\lambda-g)_n}{(1+\lambda,1+a-e,1+a-f,1+a-g)_n}\frac{\left(\frac{1+\lambda}{2},1+\frac{\lambda}{2},1+a-e,1+a-f,1+a-g,1+a+n\right)_k}{\left(\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},1+\lambda-e,1+\lambda-f,1+\lambda-g,1+\lambda+n\right)_k}\\
&=\frac{(1+a,1+\lambda-e,1+\lambda-f,1+\lambda-g)_n}{(1+\lambda,1+a-e,1+a-f,1+a-g)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda,b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,e,f,g,-n)_k}{\left(\frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\right)_k k!}\\
&\times\frac{\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)_k}{(1+\lambda-e,1+\lambda-f,1+\lambda-g,1+\lambda+n)_k}\\
&=\frac{(1+a,1+\lambda-e,1+\lambda-f,1+\lambda-g)_n}{(1+\lambda,1+a-e,1+a-f,1+a-g)_n}\\
&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}\lambda,1+\frac{\lambda}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,e,f,g,-n\\ \frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+\lambda-e,1+\lambda-f,1+\lambda-g,1+\lambda+n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

1.2 Non-Terminating Whipple の変換公式

次の公式の証明は計算量が多いが、まとめると、級数を前半分と後ろ半分に分けて極限をとるということである。また、λ は式を見やすくするために導入した助変数である。

定理 1.3. Non-Terminating Whipple の変換公式
$\lambda=1+a-d-e-f$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\ 1+a,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e,f\\ 1+a-b,1+a-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&+\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a+\lambda-b-c,-\lambda\\ 1+a,1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]\\
&\times{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a+\lambda-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\ 1+\lambda,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 1.2 より、$2+3a+n=b+c+d+e+f+g$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_9F_8\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f,g,-n\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a-g,1+a+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+a,1+\lambda-e,1+\lambda-f,1+\lambda-g)_n}{(1+\lambda,1+a-e,1+a-f,1+a-g)_n}\\
&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}\lambda,1+\frac{\lambda}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,e,f,g,-n\\ \frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+\lambda-e,1+\lambda-f,1+\lambda-g,1+\lambda+n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

である。ここで、a,c,d,e,f,g を固定し、$s=2+3a-c-d-e-f-g$ とすると、$b=s+n$ である。
また、このとき、$\lambda=1+2a-b-c-d$ より、$t=e+f+g-a-1$ とすると、$\lambda=t-n$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_9F_8\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},s+n,c,d,e,f,g,-n\\ \frac{a}{2},1+a-s-n,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a-g,1+a+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+a,1+t-e-n,1+t-f-n,1+t-g-n)_n}{(1+t-n,1+a-e,1+a-f,1+a-g)_n}\\
&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}t-n,1+\frac{t-n}{2},s+t-a,c+t-a-n,d+t-a-n,e,f,g,-n\\ \frac{t-n}{2},1+a-s-n,1+a-c,1+a-d,1+t-e-n,1+t-f-n,1+t-g-n,1+t\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+a,e-t,f-t,g-t)_n}{(-t,1+a-e,1+a-f,1+a-g)_n}\\
&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}t-n,1+\frac{t-n}{2},s+t-a,c+t-a-n,d+t-a-n,e,f,g,-n\\ \frac{t-n}{2},1+a-s-n,1+a-c,1+a-d,1+t-e-n,1+t-f-n,1+t-g-n,1+t\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、n を偶数として、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=n/2}^{n}\frac{\left(1+\frac{t-n}{2},s+t-a,e,f,g\right)_k}{\left(\frac{t-n}{2},1+a-c,1+a-d,1+t\right)_k k!}\\
&\times\frac{(t-n,c+t-a-n,d+t-a-n,-n)_k}{(1+a-s-n,1+t-e-n,1+t-f-n,1+t-g-n)_k}\\
&=\sum_{k=0}^{n/2}\frac{\left(1+\frac{t-n}{2},s+t-a,e,f,g\right)_{n-k}}{\left(\frac{t-n}{2},1+a-c,1+a-d,1+t,1\right)_{n-k}}\\
&\times\frac{(t-n,c+t-a-n,d+t-a-n,-n)_{n-k}}{(1+a-s-n,1+t-e-n,1+t-f-n,1+t-g-n)_{n-k}}\\
&=\frac{\left(1+\frac{t-n}{2},s+t-a,e,f,g,t-n,c+t-a-n,d+t-a-n,-n\right)_n}{\left(\frac{t-n}{2},1+a-c,1+a-d,1+t,1,1+a-s-n,1+t-e-n,1+t-f-n,1+t-g-n\right)_n}\\
&\times\sum_{k=0}^{n/2}\frac{\left(1-\frac{t+n}{2},c-a-n,d-a-n,-t-n,-n\right)_k}{\left(-\frac{t+n}{2},1+a-s-t-n,1-n-e,1-n-f,1-n-g\right)_k}\\
&\times\frac{(s-a,e-t,f-t,g-t)_k}{(1-t,1+a-c-t,1+a-d-t)_k k!}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(1+\frac{t-n}{2},s+t-a,e,f,g,t-n,c+t-a-n,d+t-a-n,-n\right)_n}{\left(\frac{t-n}{2},1+a-c,1+a-d,1+t,1,1+a-s-n,1+t-e-n,1+t-f-n,1+t-g-n\right)_n}\\
&=\frac{t+n}{t-n}\frac{(s+t-a,e,f,g,1-t,1+a-c-t,1+a-d-t)_n}{(1+a-c,1+a-d,1+t,s-a,e-t,f-t,g-t)_n}\\
&=\frac{(-t,1+t)_n}{(1-t,t)_n}\frac{(s+t-a,e,f,g,1-t,1+a-c-t,1+a-d-t)_n}{(1+a-c,1+a-d,1+t,s-a,e-t,f-t,g-t)_n}\\
&=\frac{(-t,s+t-a,e,f,g,1+a-c-t,1+a-d-t)_n}{(t,1+a-c,1+a-d,s-a,e-t,f-t,g-t)_n}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=n/2}^{n} \frac{\left(1+\frac{t-n}{2}, s+t-a, e, f, g\right)_k}{\left(\frac{t-n}{2}, 1+a-c, 1+a-d, 1+t\right)_k k!} \\
&\times \frac{(t-n, c+t-a-n, d+t-a-n, -n)_k}{(1+a-s-n, 1+t-e-n, 1+t-f-n, 1+t-g-n)_k} \\
&= \frac{(-t, s+t-a, e, f, g, 1+a-c-t, 1+a-d-t)_n}{(t, 1+a-c, 1+a-d, s-a, e-t, f-t, g-t)_n} \\
&\times \sum_{k=0}^{n/2} \frac{\left(1-\frac{t+n}{2}, c-a-n, d-a-n, -t-n, -n\right)_k}{\left(-\frac{t+n}{2}, 1+a-s-t-n, 1-n-e, 1-n-f, 1-n-g\right)_k} \\
&\times \frac{(s-a, e-t, f-t, g-t)_k}{(1-t, 1+a-c-t, 1+a-d-t)_k k!}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, c, d, e, f, g \\ \frac{a}{2}, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g \end{matrix}; 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} {}_9F_8\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, s+n, c, d, e, f, g, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-s-n, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+a, e-t, f-t, g-t)_n}{(-t, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g)_n} \\
&\times {}_9F_8\left[\begin{matrix} t-n, 1+\frac{t-n}{2}, s+t-a, c+t-a-n, d+t-a-n, e, f, g, -n \\ \frac{t-n}{2}, 1+a-s-n, 1+a-c, 1+a-d, 1+t-e-n, 1+t-f-n, 1+t-g-n, 1+t \end{matrix}; 1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} -t, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g \\ 1+a, e-t, f-t, g-t \end{matrix}\right] \\
&\times \lim_{n\to\infty} {}_9F_8\left[\begin{matrix} t-n, 1+\frac{t-n}{2}, s+t-a, c+t-a-n, d+t-a-n, e, f, g, -n \\ \frac{t-n}{2}, 1+a-s-n, 1+a-c, 1+a-d, 1+t-e-n, 1+t-f-n, 1+t-g-n, 1+t \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

であり、また、

$$\lim_{n\to\infty} {}_9F_8\left[\begin{matrix} t-n, 1+\frac{t-n}{2}, s+t-a, c+t-a-n, d+t-a-n, e, f, g, -n \\ \frac{t-n}{2}, 1+a-s-n, 1+a-c, 1+a-d, 1+t-e-n, 1+t-f-n, 1+t-g-n, 1+t \end{matrix}; 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n/2} + \sum_{k=n/2}^{n}\right) \frac{\left(1+\frac{t-n}{2}, s+t-a, e, f, g\right)_k}{\left(\frac{t-n}{2}, 1+a-c, 1+a-d, 1+t\right)_k k!}$$

$$\times \frac{(t-n, c+t-a-n, d+t-a-n, -n)_k}{(1+a-s-n, 1+t-e-n, 1+t-f-n, 1+t-g-n)_k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n/2} \frac{\left(1+\frac{t-n}{2}, s+t-a, e, f, g\right)_k}{\left(\frac{t-n}{2}, 1+a-c, 1+a-d, 1+t\right)_k k!}$$

$$\times \frac{(t-n, c+t-a-n, d+t-a-n, -n)_k}{(1+a-s-n, 1+t-e-n, 1+t-f-n, 1+t-g-n)_k}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{(-t, s+t-a, e, f, g, 1+a-c-t, 1+a-d-t)_n}{(t, 1+a-c, 1+a-d, s-a, e-t, f-t, g-t)_n}$$

$$\times \sum_{k=0}^{n/2} \frac{\left(1-\frac{t+n}{2}, c-a-n, d-a-n, -t-n, -n\right)_k}{\left(-\frac{t+n}{2}, 1+a-s-t-n, 1-n-e, 1-n-f, 1-n-g\right)_k}$$

$$\times \frac{(s-a, e-t, f-t, g-t)_k}{(1-t, 1+a-c-t, 1+a-d-t)_k k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s+t-a, e, f, g)_k}{(1+a-c, 1+a-d, 1+t)_k\, k!} + \Gamma\left[\begin{matrix} t, 1+a-c, 1+a-d, s-a, e-t, f-t, g-t \\ -t, s+t-a, e, f, g, 1+a-c-t, 1+a-d-t \end{matrix}\right]$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s-a, e-t, f-t, g-t)_k}{(1-t, 1+a-c-t, 1+a-d-t)_k k!}$$

$$= {}_4F_3\left[\begin{matrix} s+t-a, e, f, g \\ 1+a-c, 1+a-d, 1+t \end{matrix}; 1\right] + \Gamma\left[\begin{matrix} t, 1+a-c, 1+a-d, s-a, e-t, f-t, g-t \\ -t, s+t-a, e, f, g, 1+a-c-t, 1+a-d-t \end{matrix}\right]$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} s-a, e-t, f-t, g-t \\ 1-t, 1+a-c-t, 1+a-d-t \end{matrix}; 1\right]$$

よって、

$${}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, c, d, e, f, g \\ \frac{a}{2}, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g \end{matrix}; 1\right]$$

$$= \Gamma\left[\begin{matrix} -t, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g \\ 1+a, e-t, f-t, g-t \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} s+t-a, e, f, g \\ 1+a-c, 1+a-d, 1+t \end{matrix}; 1\right]$$

$$+ \Gamma\left[\begin{matrix} -t, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g \\ 1+a, e-t, f-t, g-t \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} t, 1+a-c, 1+a-d, s-a, e-t, f-t, g-t \\ -t, s+t-a, e, f, g, 1+a-c-t, 1+a-d-t \end{matrix}\right]$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} s-a, e-t, f-t, g-t \\ 1-t, 1+a-c-t, 1+a-d-t \end{matrix}; 1\right]$$

$$= \Gamma\left[\begin{matrix} -t, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g \\ 1+a, e-t, f-t, g-t \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} s+t-a, e, f, g \\ 1+a-c, 1+a-d, 1+t \end{matrix}; 1\right]$$

$$+ \Gamma\left[\begin{matrix} t, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, s-a \\ 1+a, s+t-a, e, f, g, 1+a-c-t, 1+a-d-t \end{matrix}\right]$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} s-a, e-t, f-t, g-t \\ 1-t, 1+a-c-t, 1+a-d-t \end{matrix}; 1\right]$$

ここで、$c \mapsto b, \quad d \mapsto c, \quad g \mapsto d, \quad t \mapsto -\lambda$ とすれば、

$$\lambda = 1+a-d-e-f, \quad s = 1+2a+\lambda-b-c$$

であり、s を消去すると、

$$\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, f \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f \end{matrix}; 1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, \lambda \\ 1+a, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, f \\ 1+a-b, 1+a-c, 1-\lambda \end{matrix}; 1\right] \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a+\lambda-b-c, -\lambda \\ 1+a, 1+a-b-c, d, e, f, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \\ 1+\lambda, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}$$

□

定理 1.4. $\lambda = 1+\frac{a}{2}-d-e$ としたとき、

$$\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix}; 1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d, 1+a-e, 1+\frac{a}{2}, \lambda \\ 1+a, d+\lambda, e+\lambda, \frac{a}{2}+\lambda \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, \frac{a}{2} \\ 1+a-b, 1+a-c, 1-\lambda \end{matrix}; 1\right] \\
&+ \frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, -\lambda, 1+a+\lambda-b-c \\ a, 1+a-b-c, d, e, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c, d+\lambda, e+\lambda, \frac{a}{2}+\lambda \\ 1+\lambda, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}$$

証明. Non-Terminating Whipple の変換公式で、$f = \frac{a}{2}$ として、第二項の因子を

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a)} = \frac{1}{2\Gamma(a)}$$

と整理すればよい。 □

系 1.1.

$$\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} -2n, b, c, d, e \\ 1-2n-b, 1-2n-c, 1-2n-d, 1-2n-e \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+n, d+e+n)_n}{(d+n, e+n)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-2n-b-c, d, e, -n \\ 1-2n-b, 1-2n-c, d+e+n \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}$$

証明. 定理 1.4 において、$a \to -2n$ とすると、$\lambda \to 1-n-d-e$ であり、

$$\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} -2n, b, c, d, e \\ 1-2n-b, 1-2n-c, 1-2n-d, 1-2n-e \end{matrix}; 1\right] \\
&= \lim_{a\to-2n} \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d, 1+a-e, 1+\frac{a}{2}, \lambda \\ 1+a, d+\lambda, e+\lambda, \frac{a}{2}+\lambda \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, \frac{a}{2} \\ 1+a-b, 1+a-c, 1-\lambda \end{matrix}; 1\right] \\
&+ \lim_{a\to-2n} \frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, -\lambda, 1+a+\lambda-b-c \\ a, 1+a-b-c, d, e, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c, d+\lambda, e+\lambda, \frac{a}{2}+\lambda \\ 1+\lambda, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}$$

ここで、第二項は分母だけに a があるので、0 であるから、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}-2n,b,c,d,e\\1-2n-b,1-2n-c,1-2n-d,1-2n-e\end{matrix};1\right]\\
&=\lim_{a\to-2n}\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)}{\Gamma(1+a)}\Gamma\left[\begin{matrix}1-2n-d,1-2n-e,\lambda\\d+\lambda,e+\lambda,-n+\lambda\end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-2n-b-c,d,e,-n\\1-2n-b,1-2n-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\Gamma\left[\begin{matrix}1-2n-d,1-2n-e,1-n-d-e\\1-n-d,1-n-e,1-2n-d-e\end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-2n-b-c,d,e,-n\\1-2n-b,1-2n-c,d+e+n\end{matrix};1\right]\\
&=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\frac{(1-2n-d-e)_n}{(1-2n-d,1-2n-e)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-2n-b-c,d,e,-n\\1-2n-b,1-2n-c,d+e+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+n,d+e+n)_n}{(d+n,e+n)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-2n-b-c,d,e,-n\\1-2n-b,1-2n-c,d+e+n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 1.5.

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,d\\1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1-2d\\1+a-2d,1-d\end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c,\frac{1}{2}+d\end{matrix};1\right]\\
&+\frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c,1+a-d,d-\frac{1}{2},\frac{3}{2}+a-b-c-d\\a,1+a-b-c,d,\frac{3}{2}+a-b-d,\frac{3}{2}+a-c-d\end{matrix}\right]\\
&\times{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{2}+a-b-c-d,\frac{1+a}{2}-d,1+\frac{a}{2}-d\\\frac{3}{2}+a-b-d,\frac{3}{2}+a-c-d,\frac{3}{2}-d\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 1.4 において、$e=\frac{1+a}{2}$ とすると、$\lambda=\frac{1}{2}-d$ であり、

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,d\\1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},\frac{1}{2}-d\\1+a,\frac{1}{2},1+\frac{a}{2}-d,\frac{1+a}{2}-d\end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c,\frac{1}{2}+d\end{matrix};1\right]\\
&+\frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c,1+a-d,d-\frac{1}{2},\frac{3}{2}+a-b-c-d\\a,1+a-b-c,d,\frac{3}{2}+a-b-d,\frac{3}{2}+a-c-d\end{matrix}\right]\\
&\times{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{3}{2}+a-b-c-d,\frac{1}{2},1+\frac{a}{2}-d,\frac{1+a}{2}-d\\\frac{3}{2}-d,\frac{3}{2}+a-b-d,\frac{3}{2}+a-c-d\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},\frac{1}{2}-d\\1+a,\frac{1}{2},1+\frac{a}{2}-d,\frac{1+a}{2}-d\end{matrix}\right]&=\frac{\Gamma(1+a-d)2^{-a}\sqrt{\pi}\Gamma(1+a)\Gamma\left(\frac{1}{2}-d\right)\Gamma(1-d)}{\Gamma(1+a)\sqrt{\pi}\cdot2^{d-a}\sqrt{\pi}\Gamma(1+a-2d)\Gamma(1-d)}\\
&=\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma\left(\frac{1}{2}-d\right)\Gamma(1-d)}{2^d\sqrt{\pi}\Gamma(1+a-2d)\Gamma(1-d)}\\
&=\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1+a-2d)\Gamma(1-d)}
\end{aligned}
$$

であるから、定理を得る。 □

定理 1.6. $\lambda = 1 + a - c - d - e$ するとき、

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right] = \Gamma\left[\begin{matrix}1+a-c,1+a-d-e,\lambda\\c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}c,d,e\\1+a-b,1-\lambda\end{matrix};1\right]
$$
$$
+\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c,1+a-d-e,-\lambda\\c,d,e,1+a+\lambda-b\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda-b\end{matrix};1\right]
$$

証明. Non-Terminating Whipple の変換公式

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\1+a,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e,f\\1+a-b,1+a-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&+\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a+\lambda-b-c,-\lambda\\1+a,1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]\\
&\times{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a+\lambda-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]\\
&\lambda=1+2a-d-e-f
\end{aligned}
$$

において、$b \to -\infty$ とすることにより、

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},c,d,e,f\\\frac{a}{2},1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\end{matrix};-1\right]\\
&=\lim_{b\to-\infty}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\1+a,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e,f\\1+a-b,1+a-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&+\lim_{b\to-\infty}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a+\lambda-b-c,-\lambda\\1+a,1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]\\
&\times{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a+\lambda-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\1+a,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}d,e,f\\1+a-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&+\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,-\lambda\\1+a,d,e,f,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},c,d,e,f\\\frac{a}{2},1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\end{matrix};-1\right]\\
&=\frac{\Gamma(1+a-e)\Gamma(1+a-f)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-e-f)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-c-d,e,f\\1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-c-d,e,f\\1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-e-f)}{\Gamma(1+a-e)\Gamma(1+a-f)}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\1+a,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}d,e,f\\1+a-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&+\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-e-f)}{\Gamma(1+a-e)\Gamma(1+a-f)}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,-\lambda\\1+a,d,e,f,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]\\
&\times{}_3F_2\left[\begin{matrix}d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1+a-e-f,\lambda\\d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}d,e,f\\1+a-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&+\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-c,1+a-d,1+a-e-f,-\lambda\\d,e,f,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$c\mapsto b,\quad d\mapsto c,\quad f\mapsto d$ とすれば、$\lambda=1+a-c-d-e$ となり、定理を得る。 □

定理 1.7. Non-Terminating Saalschütz の和公式

$1+a+b+c=d+e$ とするとき、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\d,e\end{matrix};1\right]&=\Gamma\left[\begin{matrix}e,1+a-d,1+b-d,1+c-d\\e-a,e-b,e-c,1-d\end{matrix}\right]\\
&-\Gamma\left[\begin{matrix}e,1+a-d,1+b-d,1+c-d,d-1\\a,b,c,1+e-d,1-d\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-d,1+b-d,1+c-d\\2-d,1+e-d\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 1.6 において、$b=0$ とすると、$\lambda=1+a-c-d-e$ として、

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}d,e\\1+a\end{matrix};1\right]&=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-c,1+a-d-e,\lambda\\c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}c,d,e\\1+a,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&+\Gamma\left[\begin{matrix}1+a,1+a-c,1+a-d-e,-\lambda\\c,d,e,1+a+\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda\end{matrix};1\right]\\
\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)}{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-d)}&=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-c,1+a-d-e,\lambda\\c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}c,d,e\\1+a,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&+\Gamma\left[\begin{matrix}1+a,1+a-c,1+a-d-e,-\lambda\\c,d,e,1+a+\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left[\begin{matrix}c,d,e\\1+a,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\\1+a-c,1+a-d-e,\lambda\end{matrix}\right]\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)}{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)}\\
&-\Gamma\left[\begin{matrix}c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\\1+a-c,1+a-d-e,\lambda\end{matrix}\right]\Gamma\left[\begin{matrix}1+a,1+a-c,1+a-d-e,-\lambda\\c,d,e,1+a+\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a,c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\\1+a-c,1+a-d,1+a-e,\lambda\end{matrix}\right]\\
&-\Gamma\left[\begin{matrix}1+a,c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda,-\lambda\\c,d,e,1+a+\lambda,\lambda\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\\1+\lambda,1+a+\lambda\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$a \mapsto e-1, \quad c \mapsto a, \quad d \mapsto b, \quad e \mapsto c, \quad \lambda \mapsto 1-d$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,1+c-d \\ e-a,e-b,e-c,1-d \end{matrix}\right] \\
&- \Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,1+c-d,d-1 \\ a,b,c,1+e-d,1-d \end{matrix}\right] {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-d,1+b-d,1+c-d \\ 2-d,1+e-d \end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

また、条件は、

$$1+a+b+c=d+e$$

となるので、定理を得る。 □

定理 1.8. $2+a+b=c+d$ であるとき、

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,1 \\ c,d \end{matrix};1\right] = \frac{(1-d)(c-1)}{(c-a-1)(c-b-1)} + \frac{1}{(c-a-1)(c-b-1)}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}
$$

証明. Non-Terminating Saalschütz の和公式

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};1\right] &= \Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,1+c-d \\ e-a,e-b,e-c,1-d \end{matrix}\right] \\
&- \Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,1+c-d,d-1 \\ a,b,c,1+e-d,1-d \end{matrix}\right] {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-d,1+b-d,1+c-d \\ 2-d,1+e-d \end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

において、$c=1$ とすると、条件は $2+a+b=d+e$ となり、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,1 \\ d,e \end{matrix};1\right] &= \Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,2-d \\ e-a,e-b,e-1,1-d \end{matrix}\right] \\
&- \Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,2-d,d-1 \\ a,b,1+e-d,1-d \end{matrix}\right] {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1+a-d,1+b-d \\ 1+e-d \end{matrix};1\right] \\
&= (e-1)(1-d)\Gamma\left[\begin{matrix} e-a-1,e-b-1 \\ e-a,e-b \end{matrix}\right] \\
&- (1-d)\Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,d-1 \\ a,b,1+e-d \end{matrix}\right] \frac{\Gamma(1+e-d)\Gamma(e+d-a-b-1)}{\Gamma(e-a)\Gamma(e-b)} \\
&= \frac{(1-d)(e-1)}{(e-a-1)(e-b-1)} + \Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,d \\ a,b,e-a,e-b \end{matrix}\right] \\
&= \frac{(1-d)(e-1)}{(e-a-1)(e-b-1)} + \Gamma\left[\begin{matrix} e,e-a-1,e-b-1,d \\ a,b,e-a,e-b \end{matrix}\right] \\
&= \frac{(1-d)(e-1)}{(e-a-1)(e-b-1)} + \frac{1}{(e-a-1)(e-b-1)}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}
\end{aligned}
$$

ここで、$e \mapsto c$ として、定理を得る。 □

1.3 Nearly-poised 超幾何級数の変換公式

以下の公式が重要であった。ここで、右辺は terminating で balanced な級数であり、上下の変数が打ち消し合い、${}_3F_2$ になれば、Saalschütz の和公式で総和することができる。

定理 1.9.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,w \end{matrix};1\right] = \frac{(w-a)_n}{(w)_n} {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n \\ 1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix};1\right] $$

ここで、$w=1+a+n$ とすると、well-poised になり、以下のように右辺が ${}_4F_3$ になる。

定理 1.10.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,1+a+n \end{matrix};1\right] = \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},-n \\ 1+a-b,1+a-c,\frac{1}{2}-n \end{matrix};1\right] $$

以下のように条件をつければ、総和することができる。

系 1.2. $\frac{1}{2}+a+n=b+c$ であるとき、

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,1+a+n \end{matrix};1\right] = \frac{\left(\frac{1}{2},1+a\right)_n (1+a-2b)_{2n}}{\left(1+a-b,\frac{1}{2}-b\right)_n (1+a)_{2n}} $$

証明. $\frac{1}{2}+a+n=b+c$ より、$1+a-b-c=\frac{1}{2}-n$ であるから、

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,1+a+n \end{matrix};1\right] = \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{a}{2},\frac{1+a}{2},-n \\ 1+a-b,1+a-c \end{matrix};1\right] $$

ここで、Saalschütz の和公式より、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{a}{2},\frac{1+a}{2},-n \\ 1+a-b,1+a-c \end{matrix};1\right] &= \frac{\left(1+\frac{a}{2}-b,\frac{1+a}{2}-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{1}{2}-b\right)_n} \\ &= \frac{(1+a-2b)_{2n}}{2^{2n}\left(1+a-b,\frac{1}{2}-b\right)_n} \end{aligned} $$

よって、

$$ \begin{aligned} {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,1+a+n \end{matrix};1\right] &= \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n} \frac{(1+a-2b)_{2n}}{2^{2n}\left(1+a-b,\frac{1}{2}-b\right)_n} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \frac{(1+a)_n (1+a-2b)_{2n}}{\left(1+a-b,\frac{1}{2}-b\right)_n (1+a)_{2n}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2},1+a\right)_n (1+a-2b)_{2n}}{\left(1+a-b,\frac{1}{2}-b\right)_n (1+a)_{2n}} \end{aligned} $$

□

定理 1.11.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,-n \\ 1+a-b,w \end{matrix};1\right] = \frac{(w-a)_n}{(w)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,1+a-w,-n \\ 1+a-b,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix};1\right] $$

系 1.3.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,-n \\ 1+a-b,1+2b-n \end{matrix};1\right] = \frac{\left(a-2b,1+\frac{a}{2}-b,-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{a}{2}-b,-2b\right)_n} $$

定理 1.12.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,-n \\ \frac{a}{2},1+a-b,w \end{matrix};1\right] = \frac{(w-a)_n}{(w)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}-b,\frac{1+a}{2},1+a-w,-n \\ 1+a-b,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix};1\right] $$

証明. 定理 1.9 において、$c = 1 + \frac{a}{2}$ とすればよい。 $\square$

系 1.4.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+2b-n \end{matrix}; 1\right] = \frac{(a-2b, -b)_n}{(1+a-b, -2b)_n} $$

証明. 定理 1.12 において、$w = 1 + 2b - n$ とすれば、

$$ \begin{aligned} {}_4F_3\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+2b-n \end{matrix}; 1\right] &= \frac{(1+2b-a-n)_n}{(1+2b-n)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}-b, \frac{1+a}{2}, a-2b+n, -n \\ 1+a-b, \frac{a}{2}-b, \frac{1+a}{2}-b \end{matrix}; 1\right] \\ &= \frac{(a-2b)_n}{(-2b)_n} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1+a}{2}, a-2b+n, -n \\ 1+a-b, \frac{1+a}{2}-b \end{matrix}; 1\right] \end{aligned} $$

ここで、Saalschützの和公式より、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1+a}{2}, a-2b+n, -n \\ 1+a-b, \frac{1+a}{2}-b \end{matrix}; 1\right] &= \frac{\left(\frac{1+a}{2}-b, 1+b-n\right)_n}{\left(1+a-b, \frac{1-a}{2}-b-n\right)_n} \\ &= \frac{\left(\frac{1+a}{2}-b, -b\right)_n}{\left(1+a-b, \frac{1+a}{2}-b\right)_n} \\ &= \frac{(-b)_n}{(1+a-b)_n} \end{aligned} $$

よって、

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+2b-n \end{matrix}; 1\right] = \frac{(a-2b, -b)_n}{(1+a-b, -2b)_n} $$

$\square$

系 1.5.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 2+2b-n \end{matrix}; 1\right] = \frac{\left(a-2b-1, \frac{1+a}{2}-b, -1-b\right)_n}{\left(1+a-b, \frac{a-1}{2}-b, -1-2b\right)_n} $$

証明. 定理 1.12 において、$w = 2 + 2b - n$ とすれば、

$$ \begin{aligned} {}_4F_3\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 2+2b-n \end{matrix}; 1\right] &= \frac{(2+2b-a-n)_n}{(2+2b-n)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}-b, \frac{1+a}{2}, a-2b+n-1, -n \\ 1+a-b, \frac{a-1}{2}-b, \frac{a}{2}-b \end{matrix}; 1\right] \\ &= \frac{(a-2b-1)_n}{(-1-2b)_n} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1+a}{2}, a-2b+n-1, -n \\ 1+a-b, \frac{a-1}{2}-b \end{matrix}; 1\right] \end{aligned} $$

ここで、Saalschützの和公式より、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1+a}{2}, a-2b+n-1, -n \\ 1+a-b, \frac{a-1}{2}-b \end{matrix}; 1\right] &= \frac{\left(\frac{1+a}{2}-b, 2+b-n\right)_n}{\left(1+a-b, 1+\frac{1-a}{2}+b-n\right)_n} \\ &= \frac{\left(\frac{1+a}{2}-b, -1-b\right)_n}{\left(1+a-b, \frac{a-1}{2}-b\right)_n} \end{aligned} $$

よって、

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 2+2b-n \end{matrix}; 1\right] = \frac{\left(a-2b-1, \frac{1+a}{2}-b, -1-b\right)_n}{\left(1+a-b, \frac{a-1}{2}-b, -1-2b\right)_n} $$

$\square$

定理 1.13.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,w\end{matrix};1\right]=\frac{(w-d)_n}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}d,1-n-b-c,1-n-w,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,\frac{1+d-w-n}{2},1+\frac{d-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
$$

証明. Saalschütz の和公式より、

$$
\frac{(b,c)_k}{(1-n-b,1-n-c)_k}={}_3F_2\left[\begin{matrix}1-n-b-c,k-n,-k\\1-n-b,1-n-c\end{matrix};1\right]
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,w\end{matrix};1\right]&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n,b,c,d)_k}{(1-n-b,1-n-c,w)_k k!}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n,d)_k}{(w)_k k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{(1-n-b-c,k-n,-k)_j}{(1-n-b,1-n-c)_j j!}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{(d)_k}{(w)_k k!}\frac{(1-n-b-c,-k)_j(-n)_{k+j}}{(1-n-b,1-n-c)_j j!}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(1-n-b-c)_j}{(1-n-b,1-n-c)_j j!}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(d)_{k+j}(-n)_{k+2j}(-k-j)_j}{(w)_{k+j}(k+j)!}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j(1-n-b-c,d)_j(-n)_{2j}}{(1-n-b,1-n-c,w)_j j!}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(d+j,2j-n)_k}{(w+j)_k k!}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j(1-n-b-c,d)_j(-n)_{2j}}{(1-n-b,1-n-c,w)_j j!}{}_2F_1\left[\begin{matrix}d+j,2j-n\\w+j\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j(1-n-b-c,d)_j(-n)_{2j}}{(1-n-b,1-n-c,w)_j j!}\frac{(w-d)_{n-2j}}{(w+j)_{n-2j}}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j(1-n-b-c,d)_j(-n)_{2j}}{(1-n-b,1-n-c,w)_j j!}\frac{(w-d)_n(w)_j}{(w)_{n-j}(1+d-w-n)_{2j}}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j(1-n-b-c,d)_j(-n)_{2j}}{(1-n-b,1-n-c,w)_j j!}\frac{(-1)^j(w-d)_n(w,1-n-w)_j}{(w)_n(1+d-w-n)_{2j}}\\
&=\frac{(w-d)_n}{(w)_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(1-n-b-c,d,1-n-w)_j(-n)_{2j}}{(1-n-b,1-n-c)_j(1+d-w-n)_{2j}j!}\\
&=\frac{(w-d)_n}{(w)_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(1-n-b-c,d,1-n-w,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\right)_j}{\left(1-n-b,1-n-c,\frac{1+d-w-n}{2},1+\frac{d-w-n}{2}\right)_j j!}\\
&=\frac{(w-d)_n}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}d,1-n-b-c,1-n-w,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,\frac{1+d-w-n}{2},1+\frac{d-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 1.14.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,1-n-d\end{matrix};1\right]=\frac{(2d)_n}{(d)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-n-b-c,d,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,\frac{1}{2}+d\end{matrix};1\right]
$$

証明. 定理 1.13 において、$w = 1-n-d$ とすれば、

$$\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,1-n-d\end{matrix};1\right] &= \frac{(1-n-2d)_n}{(1-n-d)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}d,1-n-b-c,d,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,d,\frac{1}{2}+d\end{matrix};1\right]\\
&= \frac{(2d)_n}{(d)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-n-b-c,d,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,\frac{1}{2}+d\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

□

系 1.6. $\frac{1}{2} = b+c+d+n$ であるとき、

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,1-n-d\end{matrix};1\right] = \frac{(2b,2c,b+c)_n}{(b,c,2b+2c)_n}$$

証明. $\frac{1}{2} = b+c+d+n$ より、$1-n-b-c = \frac{1}{2}+d$ であるから、定理 1.14 より、

$$\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,1-n-d\end{matrix};1\right] &= \frac{(2d)_n}{(d)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-n-b-c,d,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,\frac{1}{2}+d\end{matrix};1\right]\\
&= \frac{(2d)_n}{(d)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}d,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

ここで、$d = \frac{1}{2}-b-c-n$ と、Saalschütz の和公式より、

$$\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}d,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c\end{matrix};1\right] &= \Gamma\left[\begin{matrix}1-n-b,1-\frac{n}{2}-b-d,\frac{1-n}{2}-b-d,\frac{1}{2}-b\\1-n-b-d,1-\frac{n}{2}-b,\frac{1-n}{2}-b,\frac{1}{2}-b-d\end{matrix}\right]\\
&= \Gamma\left[\begin{matrix}1-n-b,\frac{1+n}{2}+c,\frac{n}{2}+c,\frac{1}{2}-b\\\frac{1}{2}+c,1-\frac{n}{2}-b,\frac{1-n}{2}-b,c+n\end{matrix}\right]\\
&= \frac{\Gamma(1-n-b)\cdot 2^{1-2c-n}\sqrt{\pi}\Gamma(2c+n)\Gamma\left(\frac{1}{2}-b\right)\Gamma(1-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c)\Gamma(1-b)\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\cdot 2^{2b+n}\sqrt{\pi}\Gamma(1-n-2b)\Gamma(c+n)}\\
&= \frac{\Gamma(1-n-b)\cdot 2^{1-2c-n}\Gamma(2c+n)\cdot 2^{2b}\sqrt{\pi}\Gamma(1-2b)\Gamma(c)}{\Gamma(1-b)\cdot 2^{1-2c}\sqrt{\pi}\Gamma(2c)\cdot 2^{2b+n}\Gamma(1-n-2b)\Gamma(c+n)}\\
&= \frac{\Gamma(1-n-b)\Gamma(2c+n)\Gamma(1-2b)\Gamma(c)}{2^{2n}\Gamma(1-b)\Gamma(2c)\Gamma(1-n-2b)\Gamma(c+n)}\\
&= \frac{(2c,1-n-2b)_n}{2^{2n}(1-n-b,c)_n}\\
&= \frac{(2b,2c)_n}{2^{2n}(b,c)_n}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{(2d)_n}{(d)_n} &= \frac{(1-2b-2c-2n)_n}{\left(\frac{1}{2}-b-c-n\right)_n}\\
&= \frac{(2b+2c+n)_n}{\left(\frac{1}{2}+b+c\right)_n}\\
&= \frac{(2b+2c)_{2n}}{\left(2b+2c,\frac{1}{2}+b+c\right)_n}\\
&= \frac{2^{2n}(b+c)_n}{(2b+2c)_n}
\end{aligned}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,1-n-d\end{matrix};1\right] &= \frac{2^{2n}(b+c)_n}{(2b+2c)_n}\frac{(2b,2c)_n}{2^{2n}(b,c)_n}\\
&= \frac{(2b,2c,b+c)_n}{(b,c,2b+2c)_n}
\end{aligned}
$$

□

定理 1.15.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,2-n-d\end{matrix};1\right] = \frac{(2d-1)_n}{(d-1)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-n-b-c,d-1,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,d-\frac{1}{2}\end{matrix};1\right]
$$

証明. 定理 1.13 において、$w=2-n-d$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,2-n-d\end{matrix};1\right] &= \frac{(2-n-2d)_n}{(2-n-d)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}d,1-n-b-c,d-1,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,d,d-\frac{1}{2}\end{matrix};1\right]\\
&= \frac{(2d-1)_n}{(d-1)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-n-b-c,d-1,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,d-\frac{1}{2}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

系 1.7. $\frac{3}{2}=b+c+d+n$ であるとき、

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,2-n-d\end{matrix};1\right] &= \frac{\left(2b,2c,b+c-\frac{1}{2},b+c\right)_n}{\left(b,c,\frac{1}{2}+b+c,2b+2c-1\right)_n}\\
&= \frac{(2c,2d-1,c+d-1)_n}{(c,d-1,2c+2d-2)_n}
\end{aligned}
$$

証明. $\frac{3}{2}=b+c+d+n$ より、$1-n-b-c=d-\frac{1}{2}$ であるから、定理 1.15 より、

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,2-n-d\end{matrix};1\right] = \frac{(2d-1)_n}{(d-1)_n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-1,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c\end{matrix};1\right]
$$

ここで、$d=\frac{3}{2}-b-c-n$ と、Saalschütz の和公式より、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}d-1,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c\end{matrix};1\right] &= \Gamma\left[\begin{matrix}1-n-b,2-\frac{n}{2}-b-d,\frac{3-n}{2}-b-d,\frac{1}{2}-b\\2-n-b-d,1-\frac{n}{2}-b,\frac{1-n}{2}-b,\frac{3}{2}-b-d\end{matrix}\right]\\
&= \Gamma\left[\begin{matrix}1-n-b,\frac{1+n}{2}+c,\frac{n}{2}+c,\frac{1}{2}-b\\\frac{1}{2}+c,1-\frac{n}{2}-b,\frac{1-n}{2}-b,c+n\end{matrix}\right]\\
&= \frac{\Gamma(1-n-b)\cdot 2^{1-n-2c}\sqrt{\pi}\Gamma(2c+n)\Gamma\left(\frac{1}{2}-b\right)\Gamma(1-b)\Gamma(c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right)\cdot 2^{2b+n}\sqrt{\pi}\Gamma(1-n-2b)\Gamma(c+n)}\\
&= \frac{\Gamma(1-n-b)\cdot 2^{1-n-2c}\Gamma(2c+n)\cdot 2^{2b}\sqrt{\pi}\Gamma(1-2b)\Gamma(c)}{\Gamma(1-b)\cdot 2^{1-2c}\sqrt{\pi}\Gamma(2c)\cdot 2^{2b+n}\Gamma(1-n-2b)\Gamma(c+n)}\\
&= \frac{\Gamma(1-n-b)\Gamma(2c+n)\Gamma(1-2b)\Gamma(c)}{2^{2n}\Gamma(1-b)\Gamma(2c)\Gamma(1-n-2b)\Gamma(c+n)}\\
&= \frac{(2c,1-n-2b)_n}{2^{2n}(1-n-b,c)_n}\\
&= \frac{(2b,2c)_n}{2^{2n}(b,c)_n}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{(2d-1)_n}{(d-1)_n} &= \frac{(2-2b-2c-2n)_n}{\left(\frac{1}{2}-b-c-n\right)_n} \\ &= \frac{(2b+2c+n-1)_n}{\left(\frac{1}{2}+b+c\right)_n} \\ &= \frac{(2b+2c-1)_{2n}}{\left(2b+2c-1,\frac{1}{2}+b+c\right)_n} \\ &= \frac{2^{2n}\left(b+c-\frac{1}{2},b+c\right)_n}{\left(2b+2c-1,\frac{1}{2}+b+c\right)_n}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d \\ 1-n-b,1-n-c,2-n-d\end{matrix};1\right] &= \frac{2^{2n}\left(b+c-\frac{1}{2},b+c\right)_n}{\left(2b+2c-1,\frac{1}{2}+b+c\right)_n}\frac{(2b,2c)_n}{2^{2n}(b,c)_n} \\ &= \frac{\left(2b,2c,b+c-\frac{1}{2},b+c\right)_n}{\left(b,c,\frac{1}{2}+b+c,2b+2c-1\right)_n}\end{aligned}$$

また、$b=\frac{3}{2}-c-d-n$ より、

$$\begin{aligned}\frac{\left(2b,2c,b+c-\frac{1}{2},b+c\right)_n}{\left(b,c,\frac{1}{2}+b+c,2b+2c-1\right)_n} &= \frac{\left(3-2c-2d-2n,2c,1-d-n,\frac{3}{2}-d-n\right)_n}{\left(\frac{3}{2}-c-d-n,c,2-d-n,2-2d-2n\right)_n} \\ &= \frac{\left(2c+2d+n-2,2c,d,d-\frac{1}{2}\right)_n}{\left(c+d-\frac{1}{2},c,d-1,2d+n-1\right)_n} \\ &= \frac{(2c+2d-2)_{2n}\left(2c,d,d-\frac{1}{2}\right)_n(2d-1)_n}{(2c+2d-2)_n\left(c+d-\frac{1}{2},c,d-1\right)_n(2d-1)_{2n}} \\ &= \frac{(c+d-1,2c,2d-1)_n}{(2c+2d-2,c,d-1)_n}\end{aligned}$$

□

Nearly-poised な ${}_5F_4$ の変換には以下の式があった。

定理 1.16.

$$\begin{aligned}&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,-n \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,w\end{matrix};1\right] \\ &= \frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},1+a-w,-n \\ 1+a-b,1+a-c,1+\frac{a-w-n}{2},1+\frac{1+a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]\end{aligned}$$

ここでは、以下のように、${}_9F_8$ に変換する公式を証明する

定理 1.17. $\lambda=1+2a-b-c-d$ としたとき、

$$\begin{aligned}&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d,-n \\ 1+a-b,1+a-c,1+a-d,2a-2\lambda-n\end{matrix};1\right] = \frac{(1+\lambda-a,1+2\lambda-a)_n}{(1+\lambda,1+2\lambda-2a)_n} \\ &\times {}_9F_8\left[\begin{matrix}\lambda,1+\frac{\lambda}{2},\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,1+2\lambda-a+n,-n \\ \frac{\lambda}{2},\lambda+\frac{1-a}{2},1+\lambda-\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,a-\lambda-n,1+\lambda+n\end{matrix};1\right]\end{aligned}$$

証明. 定理 1.1 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d,-n\\1+a-b,1+a-c,1+a-d,2a-2\lambda-n\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,-n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2},\frac{1+\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,2a-2\lambda-n\right)_k k!}{}_3F_2\left[\begin{matrix}a+2k,a-\lambda,k-n\\1+\lambda+2k,2a-2\lambda-n+k\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、Saalschütz の和公式より、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a+2k,a-\lambda,k-n\\1+\lambda+2k,2a-2\lambda-n+k\end{matrix};1\right]&=\frac{(1+\lambda-a,1+2\lambda-a+2k)_{n-k}}{(1+\lambda+2k,1+2\lambda-2a)_{n-k}}\\
&=\frac{(1+\lambda-a)_n(1+\lambda)_{2k}(1+2\lambda-a)_{n+k}(2a-2\lambda-n)_k}{(a-\lambda-n)_k(1+\lambda)_{n+k}(1+2\lambda-a)_{2k}(1+2\lambda-2a)_n}\\
&=\frac{(1+\lambda-a,1+2\lambda-a)_n(1+\lambda)_{2k}(1+2\lambda-a+n,2a-2\lambda-n)_k}{(1+\lambda,1+2\lambda-2a)_n(1+2\lambda-a)_{2k}(1+\lambda+n,a-\lambda-n)_k}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d,-n\\1+a-b,1+a-c,1+a-d,2a-2\lambda-n\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,-n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2},\frac{1+\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,2a-2\lambda-n\right)_k k!}\\
&\times\frac{(1+\lambda-a,1+2\lambda-a)_n(1+\lambda)_{2k}(1+2\lambda-a+n,2a-2\lambda-n)_k}{(1+\lambda,1+2\lambda-2a)_n(1+2\lambda-a)_{2k}(1+\lambda+n,a-\lambda-n)_k}\\
&=\frac{(1+\lambda-a,1+2\lambda-a)_n}{(1+\lambda,1+2\lambda-2a)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda,1+\frac{\lambda}{2},\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,-n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\right)_k k!}\\
&\times\frac{(1+2\lambda-a+n)_k}{\left(\lambda+\frac{1-a}{2},1+\lambda-\frac{a}{2},1+\lambda+n,a-\lambda-n\right)_k}\\
&=\frac{(1+\lambda-a,1+2\lambda-a)_n}{(1+\lambda,1+2\lambda-2a)_n}\\
&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}\lambda,1+\frac{\lambda}{2},\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,1+2\lambda-a+n,-n\\\frac{\lambda}{2},\lambda+\frac{1-a}{2},1+\lambda-\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,a-\lambda-n,1+\lambda+n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 1.18. $\lambda=1+2a-b-c-d$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d,-n\\1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+2a-2\lambda-n\end{matrix};1\right]=\frac{(\lambda-a)_n(1+2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a)}{(1+\lambda,2\lambda-2a)_n}\\
&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}\lambda,1+\frac{\lambda}{2},\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,2\lambda-a+n,-n\\\frac{\lambda}{2},\lambda+\frac{1-a}{2},1+\lambda-\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-\lambda-n,1+\lambda+n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 1.1 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d,-n\\1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+2a-2\lambda-n\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,-n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2},\frac{1+\lambda}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+2a-2\lambda-n\right)_k k!}\\
&\times{}_3F_2\left[\begin{matrix}a+2k,a-\lambda,k-n\\1+\lambda+2k,1+2a-2\lambda-n+k\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、系 1.3 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left[{a+2k, a-\lambda, k-n \atop 1+\lambda+2k, 1+2a-2\lambda-n+k}; 1\right] \\
&= \frac{\left(2\lambda-a+2k, 1+\lambda-\frac{a}{2}+k, \lambda-a\right)_{n-k}}{\left(1+\lambda+2k, \lambda-\frac{a}{2}+k, 2\lambda-2a\right)_{n-k}} \\
&= \frac{(2\lambda-a)_{n+k}(1+\lambda)_{2k}\left(1+\lambda-\frac{a}{2}, \lambda-a\right)_n\left(\lambda-\frac{a}{2}, 1+2a-2\lambda-n\right)_k}{(2\lambda-a)_{2k}(1+\lambda)_{n+k}\left(1+\lambda-\frac{a}{2}, 1+a-\lambda-n\right)_k\left(\lambda-\frac{a}{2}, 2\lambda-2a\right)_n} \\
&= \frac{\left(2\lambda-a, 1+\lambda-\frac{a}{2}, \lambda-a\right)_n(1+\lambda)_{2k}\left(2\lambda-a+n, \lambda-\frac{a}{2}, 1+2a-2\lambda-n\right)_k}{\left(1+\lambda, \lambda-\frac{a}{2}, 2\lambda-2a\right)_n(2\lambda-a)_{2k}\left(1+\lambda+n, 1+\lambda-\frac{a}{2}, 1+a-\lambda-n\right)_k} \\
&= \frac{2\lambda-a+2n}{2\lambda-a}\frac{(2\lambda-a, \lambda-a)_n(1+\lambda)_{2k}\left(2\lambda-a+n, \lambda-\frac{a}{2}, 1+2a-2\lambda-n\right)_k}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n(2\lambda-a)_{2k}\left(1+\lambda+n, 1+\lambda-\frac{a}{2}, 1+a-\lambda-n\right)_k} \\
&= \frac{(\lambda-a)_n(1+2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a)(1+\lambda)_{2k}\left(2\lambda-a+n, \lambda-\frac{a}{2}, 1+2a-2\lambda-n\right)_k}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n(2\lambda-a)_{2k}\left(1+\lambda+n, 1+\lambda-\frac{a}{2}, 1+a-\lambda-n\right)_k}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[{a, b, c, d, -n \atop 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+2a-2\lambda-n}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+2a-2\lambda-n\right)_k k!} \\
&\times \frac{(\lambda-a)_n(1+2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a)(1+\lambda)_{2k}\left(2\lambda-a+n, \lambda-\frac{a}{2}, 1+2a-2\lambda-n\right)_k}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n(2\lambda-a)_{2k}\left(1+\lambda+n, 1+\lambda-\frac{a}{2}, 1+a-\lambda-n\right)_k} \\
&= \frac{(\lambda-a)_n(1+2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a)}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d\right)_k k!} \\
&\times \frac{(2\lambda-a+n)_k}{\left(1+\lambda+n, \lambda+\frac{1-a}{2}, 1+\lambda-\frac{a}{2}, 1+a-\lambda-n\right)_k} \\
&= \frac{(\lambda-a)_n(1+2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a)}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n} \\
&\times {}_9F_8\left[{\lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, 2\lambda-a+n, -n \atop \frac{\lambda}{2}, \lambda+\frac{1-a}{2}, 1+\lambda-\frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-\lambda-n, 1+\lambda+n}; 1\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 1.19. $\lambda = 1+2a-b-c-d$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[{a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, -n \atop \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+2a-2\lambda-n}; 1\right] = \frac{(\lambda-a, 2\lambda-a)_n}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n} \\
&\times {}_9F_8\left[{\lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, 2\lambda-a+n, -n \atop \frac{\lambda}{2}, \lambda-\frac{a}{2}, \lambda+\frac{1-a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-\lambda-n, 1+\lambda+n}; 1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 1.1 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+2a-2\lambda-n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+2a-2\lambda-n\right)_k k!} \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, a-\lambda, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+\lambda+2k, 1+2a-2\lambda-n+k \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、系 1.4 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, a-\lambda, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+\lambda+2k, 1+2a-2\lambda-n+k \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(2\lambda-a+2k, \lambda-a)_{n-k}}{(1+\lambda+2k, 2\lambda-2a)_{n-k}} \\
&= \frac{(2\lambda-a)_{n+k}(1+\lambda)_{2k}(\lambda-a)_n(1+2a-2\lambda-n)_k}{(2\lambda-a)_{2k}(1+\lambda)_{n+k}(1+a-\lambda-n)_k(2\lambda-2a)_n} \\
&= \frac{(\lambda-a, 2\lambda-a)_n(1+\lambda)_{2k}(2\lambda-a+n, 1+2a-2\lambda-n)_k}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n(2\lambda-a)_{2k}(1+\lambda+n, 1+a-\lambda-n)_k}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+2a-2\lambda-n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+2a-2\lambda-n\right)_k k!} \\
&\times \frac{(\lambda-a, 2\lambda-a)_n(1+\lambda)_{2k}(2\lambda-a+n, 1+2a-2\lambda-n)_k}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n(2\lambda-a)_{2k}(1+\lambda+n, 1+a-\lambda-n)_k} \\
&= \frac{(\lambda-a, 2\lambda-a)_n}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d\right)_k k!} \\
&\times \frac{(2\lambda-a+n)_k}{(\lambda-\frac{a}{2}, \lambda+\frac{1-a}{2}, 1+\lambda+n, 1+a-\lambda-n)_k} \\
&= \frac{(\lambda-a, 2\lambda-a)_n}{(1+\lambda, 2\lambda-2a)_n} \\
&\times {}_9F_8\left[\begin{matrix} \lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, 2\lambda-a+n, -n \\ \frac{\lambda}{2}, \lambda-\frac{a}{2}, \lambda+\frac{1-a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-\lambda-n, 1+\lambda+n \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 1.20. $\lambda = 1+2a-b-c-d$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 2+2a-2\lambda-n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(\lambda-a-1)_n(2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a-1)}{(1+\lambda, 2\lambda-2a-1)_n} \\
&\times {}_9F_8\left[\begin{matrix} \lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, 2\lambda-a+n-1, -n \\ \frac{\lambda}{2}, \lambda-\frac{a}{2}, \lambda+\frac{1-a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 2+a-\lambda-n, 1+\lambda+n \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 1.1 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 2+2a-2\lambda-n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 2+2a-2\lambda-n\right)_k k!} \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, a-\lambda, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+\lambda+2k, 2+2a-2\lambda-n+k \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、系 1.5 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix} a+2k, 1+\frac{a}{2}+k, a-\lambda, k-n \\ \frac{a}{2}+k, 1+\lambda+2k, 2+2a-2\lambda-n+k \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{\left(2\lambda-a+2k-1, \lambda+\frac{1-a}{2}+k, \lambda-a-1\right)_{n-k}}{\left(1+\lambda+2k, \lambda-\frac{1+a}{2}+k, 2\lambda-2a-1\right)_{n-k}} \\
&= \frac{(2\lambda-a-1)_{n+k}(1+\lambda)_{2k}\left(\lambda+\frac{1-a}{2}, \lambda-a-1\right)_n\left(\lambda-\frac{1+a}{2}, 2+2a-2\lambda-n\right)_k}{(2\lambda-a-1)_{2k}(1+\lambda)_{n+k}\left(\lambda+\frac{1-a}{2}, 2+a-\lambda-n\right)_k\left(\lambda-\frac{1+a}{2}, 2\lambda-2a-1\right)_n} \\
&= \frac{\left(2\lambda-a-1, \lambda+\frac{1-a}{2}, \lambda-a-1\right)_n(1+\lambda)_{2k}\left(2\lambda-a+n-1, \lambda-\frac{1+a}{2}, 2+2a-2\lambda-n\right)_k}{\left(1+\lambda, \lambda-\frac{1+a}{2}, 2\lambda-2a-1\right)_n(2\lambda-a-1)_{2k}\left(1+\lambda+n, \lambda+\frac{1-a}{2}, 2+a-\lambda-n\right)_k} \\
&= \frac{2\lambda+2n-a-1}{2\lambda-a-1}\frac{(\lambda-a-1, 2\lambda-a-1)_n(1+\lambda)_{2k}\left(2\lambda-a+n-1, \lambda-\frac{1+a}{2}, 2+2a-2\lambda-n\right)_k}{(1+\lambda, 2\lambda-2a-1)_n(2\lambda-a-1)_{2k}\left(1+\lambda+n, \lambda+\frac{1-a}{2}, 2+a-\lambda-n\right)_k} \\
&= \frac{(\lambda-a-1)_n(2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a-1)(1+\lambda)_{2k}\left(2\lambda-a+n-1, \lambda-\frac{1+a}{2}, 2+2a-2\lambda-n\right)_k}{(1+\lambda, 2\lambda-2a-1)_n(2\lambda-a-1)_{2k}\left(1+\lambda+n, \lambda+\frac{1-a}{2}, 2+a-\lambda-n\right)_k}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 2+2a-2\lambda-n \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 2+2a-2\lambda-n\right)_k k!} \\
&\times \frac{(\lambda-a-1)_n(2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a-1)(1+\lambda)_{2k}\left(2\lambda-a+n-1, \lambda-\frac{1+a}{2}, 2+2a-2\lambda-n\right)_k}{(1+\lambda, 2\lambda-2a-1)_n(2\lambda-a-1)_{2k}\left(1+\lambda+n, \lambda+\frac{1-a}{2}, 2+a-\lambda-n\right)_k} \\
&= \frac{(\lambda-a-1)_n(2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a-1)}{(1+\lambda, 2\lambda-2a-1)_n} \\
&\times \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d\right)_k k!} \\
&\times \frac{(2\lambda-a+n-1)_k}{\left(1+\lambda+n, \lambda-\frac{a}{2}, \lambda+\frac{1-a}{2}, 2+a-\lambda-n\right)_k} \\
&= \frac{(\lambda-a-1)_n(2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a-1)}{(1+\lambda, 2\lambda-2a-1)_n} \\
&\times {}_9F_8\left[\begin{matrix} \lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, 2\lambda-a+n-1, -n \\ \frac{\lambda}{2}, \lambda-\frac{a}{2}, \lambda+\frac{1-a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 2+a-\lambda-n, 1+\lambda+n \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 1.21.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ \kappa-b,\kappa-c,\kappa+n \end{matrix};1\right] = \frac{(\kappa,\kappa-b-c)_n}{(\kappa-b,\kappa-c)_n} {}_5F_4\left[\begin{matrix} \frac{\kappa-a}{2},\frac{1+\kappa-a}{2},b,c,-n \\ \kappa-a,\frac{\kappa}{2},\frac{1+\kappa}{2},1-n+b+c-\kappa \end{matrix};1\right] $$

証明. 定理 1.9

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,w \end{matrix};1\right] = \frac{(w-a)_n}{(w)_n} {}_5F_4\left[\begin{matrix} 1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n \\ 1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix};1\right] $$

において、

$$ \begin{aligned} &{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,w \end{matrix};1\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a,b,c,-n)_k}{(1+a-b,1+a-c,w)_k k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a,b,c,-n)_{n-k}}{(1+a-b,1+a-c,w,1)_{n-k}} \\ &= \frac{(a,b,c,-n)_n}{(1+a-b,1+a-c,w,1)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-w-n,b-a-n,c-a-n,-n)_k}{(1-n-a,1-n-b,1-n-c)_k k!} \\ &= \frac{(-1)^n (a,b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c,w)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-w-n,b-a-n,c-a-n,-n \\ 1-n-b,1-n-c,1-n-a \end{matrix};1\right] \end{aligned} $$

また、同様に

$$ \begin{aligned} &{}_5F_4\left[\begin{matrix} 1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n \\ 1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix};1\right] \\ &= \frac{\left(1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n\right)_n}{\left(1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2},1\right)_n} {}_5F_4\left[\begin{matrix} b-a-n,c-a-n,\frac{1+w-a-n}{2},\frac{w-a-n}{2},-n \\ b+c-a-n,1-\frac{a}{2}-n,\frac{1-a}{2}-n,w-a-n \end{matrix};1\right] \\ &= \frac{(-1)^n\left(1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w\right)_n}{\left(1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\right)_n} {}_5F_4\left[\begin{matrix} b-a-n,c-a-n,\frac{1+w-a-n}{2},\frac{w-a-n}{2},-n \\ b+c-a-n,1-\frac{a}{2}-n,\frac{1-a}{2}-n,w-a-n \end{matrix};1\right] \end{aligned} $$

よって、次のようになる。

$$ \begin{aligned} &\frac{(-1)^n (a,b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c,w)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-w-n,b-a-n,c-a-n,-n \\ 1-n-b,1-n-c,1-n-a \end{matrix};1\right] \\ &= \frac{(w-a)_n}{(w)_n} \frac{(-1)^n\left(1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w\right)_n}{\left(1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\right)_n} \\ &\times {}_5F_4\left[\begin{matrix} b-a-n,c-a-n,\frac{1+w-a-n}{2},\frac{w-a-n}{2},-n \\ b+c-a-n,1-\frac{a}{2}-n,\frac{1-a}{2}-n,w-a-n \end{matrix};1\right] \end{aligned} $$

これより、

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-w-n,b-a-n,c-a-n,-n\\1-n-b,1-n-c,1-n-a\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\left(w-a,1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w\right)_n}{\left(a,b,c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2}\right)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b-a-n,c-a-n,\frac{1+w-a-n}{2},\frac{w-a-n}{2},-n\\b+c-a-n,1-\frac{a}{2}-n,\frac{1-a}{2}-n,w-a-n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(w-a,1+a-b-c,1+a-w)_n\,(a)_{2n}}{(a,b,c)_n\,(1+a-w-n)_{2n}}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b-a-n,c-a-n,\frac{1+w-a-n}{2},\frac{w-a-n}{2},-n\\b+c-a-n,1-\frac{a}{2}-n,\frac{1-a}{2}-n,w-a-n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(w-a,1+a-b-c,a+n)_n}{(b,c,1+a-w-n)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b-a-n,c-a-n,\frac{1+w-a-n}{2},\frac{w-a-n}{2},-n\\b+c-a-n,1-\frac{a}{2}-n,\frac{1-a}{2}-n,w-a-n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(-1)^n\,(1+a-b-c,a+n)_n}{(b,c)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b-a-n,c-a-n,\frac{1+w-a-n}{2},\frac{w-a-n}{2},-n\\b+c-a-n,1-\frac{a}{2}-n,\frac{1-a}{2}-n,w-a-n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$w\mapsto 1-n-w,\quad b\mapsto a+b+n,\quad c\mapsto a+c+n$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix}w,b,c,-n\\1-2n-a-b,1-2n-a-c,1-n-a\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(-1)^n\,(1-2n-a-b-c,a+n)_n}{(a+b+n,a+c+n)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b,c,\frac{2-w-a-2n}{2},\frac{1-w-a-2n}{2},-n\\a+b+c+n,1-\frac{a}{2}-n,\frac{1-a}{2}-n,1-2n-a-w\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$a\mapsto 1-2n-\kappa$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix}w,b,c,-n\\\kappa-b,\kappa-c,\kappa+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(-1)^n\,(\kappa-b-c,1-n-\kappa)_n}{(1-n+b-\kappa,1-n+c-\kappa)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b,c,\frac{1+\kappa-w}{2},\frac{\kappa-w}{2},-n\\1-n+b+c-\kappa,\frac{1+\kappa}{2},\frac{\kappa}{2},\kappa-w\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(\kappa-b-c,\kappa)_n}{(\kappa-b,\kappa-c)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b,c,\frac{1+\kappa-w}{2},\frac{\kappa-w}{2},-n\\1-n+b+c-\kappa,\frac{1+\kappa}{2},\frac{\kappa}{2},\kappa-w\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$w\mapsto a$ として、並び変えることにより、定理を得る。 □

定理 1.22.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\\kappa-b,\kappa-c\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(\kappa-b)\Gamma(\kappa-c)}{\Gamma(\kappa)\Gamma(\kappa-b-c)}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\kappa-a}{2},\frac{1+\kappa-a}{2},b,c\\\kappa-a,\frac{\kappa}{2},\frac{1+\kappa}{2}\end{matrix};1\right]
$$

証明. 定理 1.21 において、$n\to\infty$ とすればよい。 □

定理 1.23.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\Gamma(b+c)\Gamma\left(\frac{c-b}{2}\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}b,\frac{b+c-a}{2},\frac{1+b+c-a}{2}\\b+c-a,\frac{1+b+c}{2}\end{matrix};1\right]
$$

証明. 定理 1.22 において、$c=\frac{\kappa}{2}$ とすると、

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\\kappa-b\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(\kappa-b)\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right)}{\Gamma(\kappa)\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}-b\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{\kappa-a}{2},\frac{1+\kappa-a}{2},b\\\kappa-a,\frac{1+\kappa}{2}\end{matrix};1\right]
$$

ここで、$\kappa=b+c$ とすると、

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\Gamma(b+c)\Gamma\left(\frac{c-b}{2}\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}b,\frac{b+c-a}{2},\frac{1+b+c-a}{2}\\b+c-a,\frac{1+b+c}{2}\end{matrix};1\right]
$$

□

定理 1.24.

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{\kappa}{2},b,c,-n\\ \frac{\kappa}{2},1+\kappa-b,1+\kappa-c,1+\kappa+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+\kappa,1+\kappa-b-c)_n}{(1+\kappa-b,1+\kappa-c)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}\frac{\kappa-a}{2},\frac{1+\kappa-a}{2},b,c,-n\\ 1+\kappa-a,\frac{\kappa}{2},\frac{1+\kappa}{2},b+c-\kappa-n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 1.16

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,-n\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,w\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},1+a-w,-n\\ 1+a-b,1+a-c,1+\frac{a-w-n}{2},1+\frac{1+a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

において、先程の定理 1.21 の証明と同様に、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,-n\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,w\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(-1)^n\left(a,1+\frac{a}{2},b,c\right)_n}{\left(\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,w\right)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}1-n-w,1-\frac{a}{2}-n,b-a-n,c-a-n,-n\\ -\frac{a}{2}-n,1-n-b,1-n-c,1-n-a\end{matrix};1\right]\\
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},1+a-w,-n\\ 1+a-b,1+a-c,1+\frac{a-w-n}{2},1+\frac{1+a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(-1)^n\left(1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},1+a-w\right)_n}{\left(1+a-b,1+a-c,1+\frac{a-w-n}{2},1+\frac{1+a-w-n}{2}\right)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b-a-n,c-a-n,\frac{w-a-n}{2},\frac{w-a-n-1}{2},-n\\ b+c-a-n,\frac{1-a}{2}-n,-\frac{a}{2}-n,w-a-n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n\left(a,1+\frac{a}{2},b,c\right)_n}{\left(\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,w\right)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}1-n-w,1-\frac{a}{2}-n,b-a-n,c-a-n,-n\\ -\frac{a}{2}-n,1-n-b,1-n-c,1-n-a\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}\frac{(-1)^n\left(1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},1+a-w\right)_n}{\left(1+a-b,1+a-c,1+\frac{a-w-n}{2},1+\frac{1+a-w-n}{2}\right)_n}\\
&\times{}_5F_4\left[\begin{matrix}b-a-n,c-a-n,\frac{w-a-n}{2},\frac{w-a-n-1}{2},-n\\ b+c-a-n,\frac{1-a}{2}-n,-\frac{a}{2}-n,w-a-n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}1-n-w,1-\frac{a}{2}-n,b-a-n,c-a-n,-n\\ -\frac{a}{2}-n,1-n-b,1-n-c,1-n-a\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}\left(1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w\right)_n}{\left(a,b,c,1+\frac{a-w-n}{2},1+\frac{1+a-w-n}{2}\right)_n}\\
&\times{}_5F_4\left[\begin{matrix}b-a-n,c-a-n,\frac{w-a-n}{2},\frac{w-a-n-1}{2},-n\\ b+c-a-n,\frac{1-a}{2}-n,-\frac{a}{2}-n,w-a-n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}\left(1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w\right)_n}{\left(a,b,c,1+\frac{a-w-n}{2},1+\frac{1+a-w-n}{2}\right)_n}\\
&=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}\,(1+a-b-c,1+a-w)_n\,(a)_{2n}}{(a,b,c)_n\,(2+a-w-n)_{2n}}\\
&=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}\,(1+a-b-c,a+n)_n\,(1+a-w)}{(b,c)_n\,(2+a-w-n)_n(1+a-w+n)}\\
&=\frac{(w-a-1,1+a-b-c,a+n)_n}{(b,c,2+a-w-n)_n}\\
&=\frac{(-1)^n\,(1+a-b-c,a+n)_n}{(b,c)_n}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}1-n-w,1-\frac{a}{2}-n,b-a-n,c-a-n,-n\\-\frac{a}{2}-n,1-n-b,1-n-c,1-n-a\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(-1)^n\,(1+a-b-c,a+n)_n}{(b,c)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b-a-n,c-a-n,\frac{w-a-n}{2},\frac{w-a-n-1}{2},-n\\b+c-a-n,\frac{1-a}{2}-n,-\frac{a}{2}-n,w-a-n\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$w\mapsto 1-n-w,\quad b\mapsto a+b+n,\quad c\mapsto a+c+n$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}w,1-\frac{a}{2}-n,b,c,-n\\-\frac{a}{2}-n,1-2n-a-b,1-2n-a-c,1-n-a\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(-1)^n\,(1-2n-a-b-c,a+n)_n}{(a+b+n,a+c+n)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b,c,\frac{1-2n-a-w}{2},\frac{-2n-a-w}{2},-n\\b+c+a+n,\frac{1-a}{2}-n,-\frac{a}{2}-n,1-2n-a-w\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$a\to -2n-\kappa$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}w,1+\frac{\kappa}{2},b,c,-n\\\frac{\kappa}{2},1+\kappa-b,1+\kappa-c,1+\kappa+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(-1)^n\,(1+\kappa-b-c,-n-\kappa)_n}{(b-n-\kappa,c-n-\kappa)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b,c,\frac{1+\kappa-w}{2},\frac{\kappa-w}{2},-n\\b+c-n-\kappa,\frac{1+\kappa}{2},\frac{\kappa}{2},1+\kappa-w\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+\kappa-b-c,1+\kappa)_n}{(1+\kappa-b,1+\kappa-c)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}b,c,\frac{1+\kappa-w}{2},\frac{\kappa-w}{2},-n\\b+c-n-\kappa,\frac{1+\kappa}{2},\frac{\kappa}{2},1+\kappa-w\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$w\mapsto a$ として、並び変えることにより、定理を得る。 □

定理 1.25.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,1+\frac{\kappa}{2},b,c\\\frac{\kappa}{2},1+\kappa-b,1+\kappa-c\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(1+\kappa-b)\Gamma(1+\kappa-c)}{\Gamma(1+\kappa)\Gamma(1+\kappa-b-c)}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\kappa-a}{2},\frac{1+\kappa-a}{2},b,c\\1+\kappa-a,\frac{\kappa}{2},\frac{1+\kappa}{2}\end{matrix};1\right]
$$

証明. 定理 1.24 において、$n\to\infty$ とすればよい。 □

1.4 二次の変換公式

計算の効率化のために、以下の補題を用意する。

補題 1.2.

$$(1-z)^{-d}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{x(-z)^p}{(1-z)^q}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(d)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,b)_k(d+n)_{(q-p)k}(-n)_{pk}}{(c)_k(d)_{qk}k!}x^k$$

証明.

$$\begin{aligned}(1-z)^{-d}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{x(-z)^p}{(1-z)^q}\right]&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,b)_k}{(c)_kk!}x^k(-z)^{pk}(1-z)^{-d-qk}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,b)_k}{(c)_kk!}x^k(-z)^{pk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(d+qk)_n}{n!}z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{pk}(a,b)_k(d+qk)_n}{(c)_kk!n!}x^kz^{n+pk}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{pk}(a,b)_k(d+qk)_{n-pk}}{(c)_kk!(n-pk)!}x^k\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,b)_k(d)_{n+(q-p)k}(-n)_{pk}}{(c)_k(d)_{qk}k!}x^k\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(d)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,b)_k(d+n)_{(q-p)k}(-n)_{pk}}{(c)_k(d)_{qk}k!}x^k\end{aligned}$$

□

定理 1.26.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};2z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};\frac{z^2}{(1-z)^2}\right]$$

証明. 補題 1.2 において、

$$p=q=2,\quad a\mapsto\frac{a}{2},\quad b\mapsto\frac{1+a}{2},\quad c\mapsto\frac{1}{2}+b,\quad d\mapsto a,\quad x=1$$

とすると、

$$\begin{aligned}(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};\frac{z^2}{(1-z)^2}\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\right)_k(-n)_{2k}}{\left(\frac{1}{2}+b\right)_k(a)_{2k}k!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}+b\right)_kk!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};1\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\frac{2^n(b)_n}{(2b)_n}\\&={}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};2z\right]\end{aligned}$$

□

定理 1.27.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-b\end{matrix};z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\\1+a-b\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]$$

証明. 補題 1.2 において、

$$p=1,\quad q=2,\quad a\mapsto\frac{a}{2},\quad b\mapsto\frac{1+a}{2}-b,\quad c\mapsto 1+a-b,\quad d\mapsto a,\quad x=4$$

とすると、

$$\begin{aligned}(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\\1+a-b\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,a+n,-n\right)_k}{(1+a-b)_k(a)_{2k}k!}4^k\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1+a}{2}-b,a+n,-n\right)_k}{\left(1+a-b,\frac{1+a}{2}\right)_k k!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}-b,a+n,-n\\1+a-b,\frac{1+a}{2}\end{matrix};1\right]\end{aligned}$$

ここで、Saalschützの和公式より、

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}-b,a+n,-n\\1+a-b,\frac{1+a}{2}\end{matrix};1\right]&=\frac{\left(\frac{1+a}{2},1-n-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{1-a}{2}-n\right)_n}\\&=\frac{(b)_n}{(1+a-b)_n}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\frac{(b)_n}{(1+a-b)_n}\\&={}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-b\end{matrix};z\right]\end{aligned}$$

□

定理 1.28.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}2a,2b\\\frac{1}{2}+a+b\end{matrix};z\right]={}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\\frac{1}{2}+a+b\end{matrix};4z(1-z)\right],\qquad z\leq\frac{1}{2}$$

証明. 定理 1.27 において、$a\mapsto 2a,\quad b\mapsto\frac{1}{2}+a-b,\quad z\mapsto\frac{z}{z-1}$ とすると、

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}2a,\frac{1}{2}+a-b\\\frac{1}{2}+a+b\end{matrix};\frac{z}{z-1}\right]=(1-z)^{2a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\\frac{1}{2}+a+b\end{matrix};4z(1-z)\right]$$

Pfaffの変換公式より、

$$\begin{aligned}(1-z)^{2a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}2a,2b\\\frac{1}{2}+a+b\end{matrix};z\right]&=(1-z)^{2a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\\frac{1}{2}+a+b\end{matrix};4z(1-z)\right]\\{}_2F_1\left[\begin{matrix}2a,2b\\\frac{1}{2}+a+b\end{matrix};z\right]&={}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\\frac{1}{2}+a+b\end{matrix};4z(1-z)\right]\end{aligned}$$

□

定理 1.29.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-b\end{matrix};z\right]=(1+z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b\end{matrix};\frac{4z}{(1+z)^2}\right]$$

証明. 定理 1.27 において、Pfaff の変換公式より、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-b\end{matrix};z\right] &= (1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\\1+a-b\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]\\
&= (1-z)^{-a}\left(1+\frac{4z}{(1-z)^2}\right)^{-a/2}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b\end{matrix};\frac{-\frac{4z}{(1-z)^2}}{-\frac{4z}{(1-z)^2}-1}\right]\\
&= (1+z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b\end{matrix};\frac{4z}{(1+z)^2}\right]
\end{aligned}$$

□

これは、$z\mapsto\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}$ として、以下のように書ける。

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b\end{matrix};z\right]=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^a{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-b\end{matrix};\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right]$$

定理 1.30.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};\frac{4z}{(1+z)^2}\right]=(1+z)^{2a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a-b\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};z^2\right]$$

証明. 定理 1.26 より、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};\frac{4z}{(1+z)^2}\right] &= \left(1-\frac{2z}{(1+z)^2}\right)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};\frac{\frac{2z}{(1+z)^2}}{1-\frac{2z}{(1+z)^2}}\right]\\
&= \left(\frac{1+z^2}{(1+z)^2}\right)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\\frac{1}{2}+b\end{matrix}\frac{4z^2}{(1+z^2)^2}\right]
\end{aligned}$$

ここで、定理 1.29 より、

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\\frac{1}{2}+b\end{matrix}\frac{4z^2}{(1+z^2)^2}\right]=(1+z^2)^a{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a-b\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};z^2\right]$$

であるから、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};\frac{4z}{(1+z)^2}\right] &= \left(\frac{1+z^2}{(1+z)^2}\right)^{-a}(1+z^2)^a{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a-b\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};z^2\right]\\
&= (1+z)^{2a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a-b\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};z^2\right]
\end{aligned}$$

□

これは、$z\mapsto\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}$ として、以下のように書ける。

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};z\right]=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a-b\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};\left(\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right)^2\right]$$

次は第一種完全楕円積分の Landen 変換というものである。

系 1.8.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};z^2\right]=\frac{2}{1+\sqrt{1-z^2}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};\left(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}\right)^2\right]$$

証明. 定理 1.30 において、$a=b=\frac{1}{2}$ とすればよい。 □

定理 1.31.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};z\right]=(1-z)^{-a}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] $$

証明. Saalschütz の和公式より、

$$ \frac{(b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n}={}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,a+n,-n\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right] $$

であるから、

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};z\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\frac{(b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+k}}{n!}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,-n)_k}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+2k}}{(n+k)!}z^{n+k}\frac{(1+a-b-c,-n-k)_k}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+a-b-c)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}(-z)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k)_n}{n!}z^n\\ &=(1-z)^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+a-b-c)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}(-z)^k(1-z)^{-2k}\\ &=(1-z)^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\right)_k}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}(-4z)^k(1-z)^{-2k}\\ &=(1-z)^{-a}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \end{aligned} $$

□

定理 1.32.

$$ \begin{aligned} {}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,1+d\\1+a-b,1+a-c,d\end{matrix};z\right]&=(1-z)^{-a}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+d\\1+a-b,1+a-c,d\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]\\ &\quad+\frac{az}{d(1-z)^{1+a}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \end{aligned} $$

証明. 定理 1.31 の証明と同様に、

$$ \begin{aligned} {}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,1+d\\1+a-b,1+a-c,d\end{matrix};z\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,1+d)_n}{(d)_n n!}z^n\frac{(b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+k}(1+d)_n}{(d)_n n!}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,-n)_k}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+2k}(1+d)_{n+k}}{(d)_{n+k}(n+k)!}z^{n+k}\frac{(1+a-b-c,-n-k)_k}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+a-b-c,1+d)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c,d)_k k!}(-z)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k,1+d+k)_n}{(d+k)_n n!}z^n \end{aligned} $$

ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k,1+d+k)_n}{(d+k)_n n!}z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k)_n(d+k+n)}{(d+k)n!}z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k)_n}{n!}z^n + \frac{1}{d+k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+2k)_n}{(n-1)!}z^n \\ &= (1-z)^{-a-2k} + \frac{(a+2k)z}{d+k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k+1)_n}{n!}z^n \\ &= (1-z)^{-a-2k} + \frac{(a+2k)z}{d+k}(1-z)^{-a-2k-1}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}&{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,1+d\\1+a-b,1+a-c,d\end{matrix};z\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+a-b-c,1+d)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c,d)_k k!}(-z)^k\left((1-z)^{-a-2k} + \frac{(a+2k)z}{d+k}(1-z)^{-a-2k-1}\right) \\ &= (1-z)^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+a-b-c,1+d)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c,d)_k k!}(-z)^k(1-z)^{-2k} \\ &+ z(1-z)^{-1-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+a-b-c,1+d)_k(a)_{2k}(a+2k)}{(1+a-b,1+a-c,d)_k(d+k)k!}(-z)^k(1-z)^{-2k} \\ &= (1-z)^{-a}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+d\\1+a-b,1+a-c,d\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \\ &+ \frac{az}{d(1-z)^{1+a}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+a-b-c)_k(1+a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}(-z)^k(1-z)^{-2k} \\ &= (1-z)^{-a}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+d\\1+a-b,1+a-c,d\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \\ &+ \frac{az}{d(1-z)^{1+a}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]\end{aligned}$$

□

定理 1.33.

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c\end{matrix};z\right] = \frac{1+z}{(1-z)^{1+a}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]$$

証明. 定理 1.32 において、$d=\frac{a}{2}$ とすると、

$$\begin{aligned}{}_4F_3\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c\end{matrix};z\right] &= (1-z)^{-a}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \\ &+ \frac{2z}{(1-z)^{1+a}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \\ &= \frac{1+z}{(1-z)^{1+a}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right]\end{aligned}$$

□

1.5 Clausen の公式

定理 1.34.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ \frac{1}{2}+a+b \end{matrix};z\right]^2 = {}_3F_2\left[\begin{matrix} 2a,2b,a+b \\ \frac{1}{2}+a+b,2a+2b \end{matrix};z\right] $$

証明.

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};z\right]^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(a,b)_k (a,b)_{n-k}}{(c)_k k! (c)_{n-k}(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c)_n n!} z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(a,b,1-n-c,-n)_k}{(1-n-a,1-n-b,c)_k k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c)_n n!} z^n {}_4F_3\left[\begin{matrix} -n,a,b,1-n-c \\ 1-n-a,1-n-b,c \end{matrix};1\right] \end{aligned} $$

ここで、$c=\frac{1}{2}+a+b$ とすると、系 1.6 の条件を満たすから、

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} -n,a,b,1-n-c \\ 1-n-a,1-n-b,c \end{matrix};1\right] = \frac{(2a,2b,a+b)_n}{(a,b,2a+2b)_n} $$

よって、

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ \frac{1}{2}+a+b \end{matrix};z\right]^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{\left(\frac{1}{2}+a+b\right)_n n!} z^n \frac{(2a,2b,a+b)_n}{(a,b,2a+2b)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a,2b,a+b)_n}{\left(\frac{1}{2}+a+b,2a+2b\right)_n n!} z^n \\ &= {}_3F_2\left[\begin{matrix} 2a,2b,a+b \\ \frac{1}{2}+a+b,2a+2b \end{matrix};z\right] \end{aligned} $$

□

系 1.9.

$$ \arcsin^2 x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}} $$

証明. 定理 1.34 において、$a=b=\frac{1}{2},\quad z\mapsto x^2$ とすると、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix};x^2\right]^2 &= {}_3F_2\left[\begin{matrix}1,1,1\\ \frac{3}{2},2\end{matrix};x^2\right]\\
\frac{\arcsin^2 x}{x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!^3}{\left(\frac{3}{2},2\right)_n n!}x^{2n}\\
\arcsin^2 x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!(n+1)}x^{2n+2}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!(n+1)^2}x^{2n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}n!^2}{(2n)!n^2}x^{2n+2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}}
\end{aligned}$$

□

定理 1.35.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ \frac{1+a+b}{2}\end{matrix};z\right]^2 = {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,\frac{a+b}{2}\\ a+b,\frac{1+a+b}{2}\end{matrix};4z(1-z)\right],\qquad z\le\frac{1}{2}$$

証明. 定理 1.28 と定理 1.34 より、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}2a,2b\\ \frac{1}{2}+a+b\end{matrix};z\right]^2 &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ \frac{1}{2}+a+b\end{matrix};4z(1-z)\right]^2\\
&= {}_3F_2\left[\begin{matrix}2a,2b,a+b\\ \frac{1}{2}+a+b,2a+2b\end{matrix};4z(1-z)\right]
\end{aligned}$$

ここで、$a\mapsto\frac{a}{2},\quad b\mapsto\frac{b}{2}$ とすることにより、定理を得る。 □

系 1.10.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix};z\right]^2 = {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\ 1,1\end{matrix};4z(1-z)\right],\qquad z\le\frac{1}{2}$$

証明. 定理 1.35 において、$a=b=\frac{1}{2}$ とすればよい。 □

定理 1.36.

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ \frac{1}{2}+a+b\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ a+b-\frac{1}{2}\end{matrix};z\right] = {}_3F_2\left[\begin{matrix}2a,2b,a+b\\ \frac{1}{2}+a+b,2a+2b-1\end{matrix};z\right]$$

証明.

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c-1\end{matrix};z\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,b)_k(a,b)_{n-k}}{(c)_k k!(c-1)_{n-k}(n-k)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c-1)_n n!}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n,a,b,2-n-c)_k}{(1-n-a,1-n-b,c)_k k!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c-1)_n n!}z^n{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,a,b,2-n-c\\ 1-n-a,1-n-b,c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

ここで、$c=\frac{1}{2}+a+b$ とすると、系 1.7 の条件を満たすから、

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,a,b,2-n-c\\1-n-a,1-n-b,c\end{matrix};1\right]=\frac{\left(2a,2b,a+b-\frac{1}{2},a+b\right)_n}{\left(a,b,\frac{1}{2}+a+b,2a+2b-1\right)_n}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\\frac{1}{2}+a+b\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\a+b-\frac{1}{2}\end{matrix};z\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{\left(a+b-\frac{1}{2}\right)_n n!}z^n\frac{\left(2a,2b,a+b-\frac{1}{2},a+b\right)_n}{\left(a,b,\frac{1}{2}+a+b,2a+2b-1\right)_n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2a,2b,a+b)_n}{\left(\frac{1}{2}+a+b,2a+2b-1\right)_n n!}z^n\\
&={}_3F_2\left[\begin{matrix}2a,2b,a+b\\\frac{1}{2}+a+b,2a+2b-1\end{matrix};z\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 1.37.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\a+b-\frac{1}{2}\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b-1\\a+b-\frac{1}{2}\end{matrix};z\right]={}_3F_2\left[\begin{matrix}2a,2b-1,a+b-1\\a+b-\frac{1}{2},2a+2b-2\end{matrix};z\right]
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b-1\\c\end{matrix};z\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,b)_k(a,b-1)_{n-k}}{(c)_k k!(c)_{n-k}(n-k)!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b-1)_n}{(c)_n n!}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n,a,b,1-n-c)_k}{(1-n-a,2-n-b,c)_k k!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b-1)_n}{(c)_n n!}z^n{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,a,b,1-n-c\\1-n-a,2-n-b,c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$c=a+b-\frac{1}{2}$ とすると、系 1.7 の条件を満たすから、

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,a,b,1-n-c\\1-n-a,2-n-b,c\end{matrix};1\right]=\frac{(2a,2b-1,a+b-1)_n}{(a,b-1,2a+2b-2)_n}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\a+b-\frac{1}{2}\end{matrix};z\right]{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b-1\\a+b-\frac{1}{2}\end{matrix};z\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b-1)_n}{\left(a+b-\frac{1}{2}\right)_n n!}z^n\frac{(2a,2b-1,a+b-1)_n}{(a,b-1,2a+2b-2)_n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2a,2b-1,a+b-1)_n}{\left(a+b-\frac{1}{2},2a+2b-2\right)_n n!}z^n\\
&={}_3F_2\left[\begin{matrix}2a,2b-1,a+b-1\\a+b-\frac{1}{2},2a+2b-2\end{matrix};z\right]
\end{aligned}
$$

□

第 2 章

Bilateral 超幾何級数

2.1 Bilateral 超幾何級数の定義

Bilateral 超幾何級数を以下のように定義する。

定義 2.1.

$$
{}_rH_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};z\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)_n}z^n
$$

これは、以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
{}_rH_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};z\right]&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)_n}z^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)_n}z^n+\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(a_1,\ldots,a_r)_n}{(b_1,\ldots,b_s)_n}z^n-1\\
&={}_{r+1}F_s\left[\begin{matrix}1,a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};z\right]+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r)_{-n}}{(b_1,\ldots,b_s)_{-n}}z^{-n}-1\\
&={}_{r+1}F_s\left[\begin{matrix}1,a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};z\right]+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-b_1,\ldots,1-b_s)_n}{(1-a_1,\ldots,1-a_r)_{-n}}(-1)^{n(r-s)}z^{-n}-1\\
&={}_{r+1}F_s\left[\begin{matrix}1,a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};z\right]+{}_{s+1}F_r\left[\begin{matrix}1,1-b_1,\ldots,1-b_s\\ 1-a_1,\ldots,1-a_r\end{matrix};\frac{(-1)^{r-s}}{z}\right]-1
\end{aligned}
$$

このことから、どちらかが有限和ではない限り、収束するためには $r=s$ が必要である。また、$|z|\neq 1$ のとき、これが収束するのは、一方が有限和でもう一方が収束する場合のみである。よって、ここでは $r=s,\quad |z|=1$ の場合のみを考えるものとする。

最後の式から、

$$
\sum_{k=0}^{r}b_k-\sum_{k=0}^{r}a_k>1
$$

ならば収束することが分かる。

定理 2.1.

$$
{}_1H_1\left[\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};1\right]=0
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
{}_1H_1\left[\begin{matrix}a\\c\end{matrix};1\right] &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}1,a\\c\end{matrix};1\right]+{}_2F_1\left[\begin{matrix}1,1-c\\1-a\end{matrix};1\right]-1\\
&=\frac{c-1}{c-a-1}+\frac{-a}{c-a-1}-1\\
&=0
\end{aligned}
$$

□

2.2 Dougall の ${}_2H_2$ 和公式

次は Gauss の超幾何定理の一般化になっている。

定理 2.2. Dougall の ${}_2H_2$ 和公式

$$
{}_2H_2\left[\begin{matrix}a,b\\c,d\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}
$$

証明. N を偶数として、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N/2}^{\infty}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N/2}^{0}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N/2}^{0}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(1+a-c,1+a-d)_n}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N/2}^{0}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(a,b)_n}{(1+a-c,1+a-d)_n}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N/2}^{\infty}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(a,b)_n}{(1+a-c,1+a-d)_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(1+a-c,1+a-d)_n}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(1+a-c,1+a-d)_n}\\
&={}_2H_2\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、${}_5F_4$ の和公式

$$
{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)}
$$

において、$a\mapsto a-N, b\mapsto b-N$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a-N,1+\frac{a-N}{2},b-N,c,d\\ \frac{a-N}{2},1+a-b,1+a-c-N,1+a-d-N\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c-N)\Gamma(1+a-d-N)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a-N)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d-N)}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a-N,1+\frac{a-N}{2},b-N,c,d\\ \frac{a-N}{2},1+a-b,1+a-c-N,1+a-d-N\end{matrix};1\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a-N,1+\frac{a-N}{2},b-N,c,d\right)_n}{\left(\frac{a-N}{2},1+a-b,1+a-c-N,1+a-d-N,1\right)_n}\\
&=\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{\left(a-N,1+\frac{a-N}{2},b-N,c,d\right)_{n+N}}{\left(\frac{a-N}{2},1+a-b,1+a-c-N,1+a-d-N,1\right)_{n+N}}\\
&=\frac{\left(a-N,1+\frac{a-N}{2},b-N,c,d\right)_N}{\left(\frac{a-N}{2},1+a-b,1+a-c-N,1+a-d-N,1\right)_N}\\
&\times\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{\infty} \frac{\left(a, 1+\frac{a+N}{2}, b, c+N, d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2}, 1+a-b+N, 1+a-c, 1+a-d, 1+N\right)_n} \\
&= \frac{\left(\frac{a-N}{2}, 1+a-b, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1\right)_N}{\left(a-N, 1+\frac{a-N}{2}, b-N, c, d\right)_N} \\
&\times \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c-N)\Gamma(1+a-d-N)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a-N)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d-N)} \\
&= \frac{\left(\frac{a-N}{2}\right)_N}{\left(a-N, 1+\frac{a-N}{2}, b-N, c, d\right)_N} \\
&\times \frac{\Gamma(1+N)\Gamma(1+a-b+N)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a-N)\Gamma(1+a-c-d-N)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)} \\
&= \frac{\left(\frac{a-N}{2}, 1+a-N, 1+a-c-d-N\right)_N}{\left(1+\frac{a-N}{2}, 1-a, 1-b, c, d\right)_N} \\
&\times \frac{\Gamma(1+N)\Gamma(1+a-b+N)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-c-d)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)} \\
&= \frac{a-N}{a+N} \frac{(-a, c+d-a)_N}{(1-a, 1-b, c, d)_N} \\
&\times \frac{\Gamma(1+N)\Gamma(1+a-b+N)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-c-d)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\frac{a-N}{a+N} \frac{(-a, c+d-a)_N}{(1-a, 1-b, c, d)_N} \\
&= \frac{a-N}{a+N} \frac{-a}{-a+N} \frac{(c+d-a)_N}{(1-b, c, d)_N} \\
&= \frac{a}{a+N} \frac{(c+d-a)_N}{(1-b, c, d)_N} \\
&= \frac{(a, c+d-a)_N}{(1+a, 1-b, c, d)_N} \\
&= \frac{\Gamma(a+N)\Gamma(c+d-a+N)\Gamma(1+a)\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(1+a+N)\Gamma(1-b+N)\Gamma(c+N)\Gamma(d+N)\Gamma(a)\Gamma(c+d-a)}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{\infty} \frac{\left(a, 1+\frac{a+N}{2}, b, c+N, d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2}, 1+a-b+N, 1+a-c, 1+a-d, 1+N\right)_n} \\
&= \frac{\Gamma(a+N)\Gamma(c+d-a+N)\Gamma(1+a)\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(1+a+N)\Gamma(1-b+N)\Gamma(c+N)\Gamma(d+N)\Gamma(a)\Gamma(c+d-a)} \\
&\times \frac{\Gamma(1+N)\Gamma(1+a-b+N)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-c-d)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)} \\
&= \frac{\Gamma(a+N)\Gamma(c+d-a+N)\Gamma(1+N)\Gamma(1+a-b+N)}{\Gamma(1+a+N)\Gamma(1-b+N)\Gamma(c+N)\Gamma(d+N)} \\
&\times \frac{\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(a)\Gamma(c+d-a)\Gamma(1+a-c-d)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)}
\end{aligned}
$$

ここで、$a+(c+d-a)+1+(1+a-b)=(1+a)+(1-b)+c+d$ であるから、極限をとると、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(a+N)\Gamma(c+d-a+N)\Gamma(1+N)\Gamma(1+a-b+N)}{\Gamma(1+a+N)\Gamma(1-b+N)\Gamma(c+N)\Gamma(d+N)}\\
&\times\frac{\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(a)\Gamma(c+d-a)\Gamma(1+a-c-d)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)}\\
&=\frac{\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(a)\Gamma(c+d-a)\Gamma(1+a-c-d)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)}
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{-N/2}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&=\sum_{n=N/2}^{N}\frac{\left(1-\frac{a+N}{2},b-a-N,c-a,d-a,-N\right)_n}{\left(1-a,-\frac{a+N}{2},1-b,1-c+N,1-d+N\right)_n}\\
&=\sum_{n=0}^{N/2}\frac{\left(1-\frac{a+N}{2},b-a-N,c-a,d-a,-N\right)_{N-n}}{\left(1-a,-\frac{a+N}{2},1-b,1-c-N,1-d-N\right)_{N-n}}\\
&=\frac{\left(1-\frac{a+N}{2},b-a-N,c-a,d-a,-N\right)_N}{\left(1-a,-\frac{a+N}{2},1-b,1-c-N,1-d-N\right)_N}\\
&\times\sum_{n=0}^{N/2}\frac{\left(a-N,b-N,1+\frac{a-N}{2},c,d\right)_n}{\left(\frac{a-N}{2},1+a-b,1+a-c-N,1+a-d-N\right)_n n!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{a-N}{a+N}\frac{(1+a-b,c-a,d-a,1)_N}{(1-a,1-b,c,d)_N}\\
&\times\sum_{n=0}^{N/2}\frac{\left(a-N,b-N,1+\frac{a-N}{2},c,d\right)_n}{\left(\frac{a-N}{2},1+a-b,1+a-c-N,1+a-d-N\right)_n n!}\\
&=\frac{(a,1+a-b,c-a,d-a,1)_N}{(-a,1+a,1-b,c,d)_N}\\
&\times\sum_{n=0}^{N/2}\frac{\left(a-N,b-N,1+\frac{a-N}{2},c,d\right)_n}{\left(\frac{a-N}{2},1+a-b,1+a-c-N,1+a-d-N\right)_n n!}
\end{aligned}
$$

ここで、$N \to \infty$ とすると、先程と同様に、

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{n=-N}^{-N/2}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a,1+a-b,c-a,d-a,1)_N}{(-a,1+a,1-b,c,d)_N}\\
&\times\sum_{n=0}^{N/2}\frac{\left(a-N,b-N,1+\frac{a-N}{2},c,d\right)_n}{\left(\frac{a-N}{2},1+a-b,1+a-c-N,1+a-d-N\right)_n n!}\\
&=\frac{\Gamma(-a)\Gamma(1+a)\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(a)\Gamma(1+a-b)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c,d)_n}{(1+a-b)_n n!}\\
&=-\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)}\\
&=-\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
&{}_2H_2\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]\\
&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N/2}^{\infty}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&-\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{-N/2}\frac{\left(a,1+\frac{a+N}{2},b,c+N,d+N\right)_n}{\left(\frac{a+N}{2},1+a-b+N,1+a-c,1+a-d,1+N\right)_n}\\
&=\frac{\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(a)\Gamma(c+d-a)\Gamma(1+a-c-d)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)}\\
&+\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)}
\end{aligned}$$

ここで、$c\mapsto 1+a-c,\quad d\mapsto 1+a-d$ とすれば、

$$\begin{aligned}
&{}_2H_2\left[\begin{matrix}a,b\\c,d\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(2+a-c-d)\Gamma(c+d-a-1)\Gamma(c-b)\Gamma(d-b)}\\
&+\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(1-c)\Gamma(1-d)\Gamma(c-b)\Gamma(d-b)}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)}{\Gamma(a)\Gamma(2+a-c-d)\Gamma(c+d-a-1)}\\
&=\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)}{\Gamma(1-a)\Gamma(a)\Gamma(2+a-c-d)\Gamma(c+d-a-1)}\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}\\
&=\frac{\sin\pi a\sin\pi(a-c-d)}{\sin\pi(c-a)\sin\pi(d-a)}\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}
\end{aligned}$$

また、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)}{\Gamma(1-c)\Gamma(1-d)} \\
&= \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-c)\Gamma(1-d)} \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)} \\
&= \frac{\sin \pi c \sin \pi d}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(d-a)} \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_2H_2\left[\begin{matrix} a, b \\ c, d \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{\sin \pi a \sin \pi(a-c-d)}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(d-a)} \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)} \\
&+ \frac{\sin \pi c \sin \pi d}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(d-a)} \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)} \\
&= \left(\frac{\sin \pi a \sin \pi(a-c-d)}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(d-a)} + \frac{\sin \pi c \sin \pi d}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(d-a)} \right) \\
&\times \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin \pi a \sin \pi(a-c-d)}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(d-a)} + \frac{\sin \pi c \sin \pi d}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(d-a)} \\
&= \frac{\sin \pi a \sin \pi(a-c-d) + \sin \pi c \sin \pi d}{\sin \pi(c-a) \sin \pi(d-a)} \\
&= \frac{(\cos \pi(2a-c-d) - \cos \pi(c+d)) + (\cos \pi(c+d) - \cos \pi(c-d))}{\cos \pi(2a-c-d) - \cos \pi(c-d)} = 1
\end{aligned}
$$

であるから、定理を得る。 □

系 2.1.

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a, n+b)_{m+1}} = \binom{2m}{m} \frac{1}{(1+a-b, 1+b-a)_m} \frac{\pi}{\sin \pi a \sin \pi b} \frac{\sin \pi(b-a)}{b-a}
$$

証明. Dougall の ${}_2H_2$ 和公式において、$c \mapsto a+m+1, \quad d \mapsto b+m+1$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_2H_2\left[\begin{matrix} a, b \\ a+m+1, b+m+1 \end{matrix}; 1\right] &= \frac{\Gamma(a+m+1)\Gamma(b+m+1)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+a-b+1)\Gamma(m+b-a+1)\Gamma(m+1)} \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(a+m+1, b+m+1)_n} &= \frac{(2m)!(a,b)_{m+1}\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{m!^2(1+a-b, 1+b-a)_m\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+b-a)} \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a,b)_{m+1}}{(n+a, n+b)_{m+1}} &= \binom{2m}{m} \frac{(a,b)_{m+1}}{(1+a-b, 1+b-a)_m} \frac{\pi}{\sin \pi a \sin \pi b} \frac{\sin \pi(b-a)}{b-a} \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a, n+b)_{m+1}} &= \binom{2m}{m} \frac{1}{(1+a-b, 1+b-a)_m} \frac{\pi}{\sin \pi a \sin \pi b} \frac{\sin \pi(b-a)}{b-a}
\end{aligned}
$$

□

系 2.2.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{\pi}{\sin \pi a \sin \pi b} \frac{\sin \pi(b-a)}{b-a}$$

証明. 系 2.1 において、$m=0$ とすればよい。 □

系 2.3.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)_{m+1}^2} = \frac{(2m)!}{m!^4} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$$

証明. 系 2.1 において、$b \to a$ と極限をとれば、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)_{m+1}^2} &= \lim_{b \to a} \binom{2m}{m} \frac{1}{(1+a-b, 1+b-a)_m} \frac{\pi}{\sin \pi a \sin \pi b} \frac{\sin \pi(b-a)}{b-a} \\
&= \binom{2m}{m} \frac{1}{m!^2} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a} \\
&= \frac{(2m)!}{m!^4} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}
\end{aligned}$$

□

系 2.4.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$$

証明. 系 2.3 において、$m=0$ とすればよい。 □

定理 2.3. Bailey の ${}_3H_3$ 和公式

$$\lambda = \frac{(f-a)(f-b)-(1+f-c)(1+f-d)}{f}$$

としたとき、

$${}_3H_3 \left[\begin{matrix} a, b, 1+f \\ c, d, f \end{matrix} ; 1 \right] = \lambda \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}$$

証明.

$$\begin{aligned}
{}_3H_3 \left[\begin{matrix} a, b, 1+f \\ c, d, f \end{matrix} ; 1 \right] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a, b, 1+f)_n}{(c, d, f)_n} \\
&= \frac{1}{f} \sum_{n=-\infty} \frac{(a, b)_n (f+n)}{(c, d)_n} \\
&= \frac{f-b}{f} \sum_{n=-\infty} \frac{(a, b)_n}{(c, d)_n} + \frac{1}{f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a, b)_n (b+n)}{(c, d)_n} \\
&= \frac{f-b}{f} {}_2H_2 \left[\begin{matrix} a, b \\ c, d \end{matrix} ; 1 \right] + \frac{b}{f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a, b+1)_n}{(c, d)_n} \\
&= \frac{f-b}{f} {}_2H_2 \left[\begin{matrix} a, b \\ c, d \end{matrix} ; 1 \right] + \frac{b}{f} {}_2H_2 \left[\begin{matrix} a, b+1 \\ c, d \end{matrix} ; 1 \right]
\end{aligned}$$

ここで、Dougall の ${}_2H_2$ 和公式より、

$$\begin{aligned}
&\frac{f-b}{f}{}_2H_2\left[\begin{matrix}a,b\\c,d\end{matrix};1\right]+\frac{b}{f}{}_2H_2\left[\begin{matrix}a,b+1\\c,d\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{f-b}{f}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}+\frac{b}{f}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(-b)\Gamma(c+d-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b-1)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b-1)}\\
&=\frac{(f-b)(c+d-a-b-2)}{f}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}\\
&-\frac{(c-b-1)(d-b-1)}{f}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}\\
&=\frac{(f-b)(c+d-a-b-2)-(c-b-1)(d-b-1)}{f}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&(f-b)(c+d-a-b-2)-(c-b-1)(d-b-1)\\
&=(f-b)(f-a)+(f-b)(c+d-b-f-2)-(c-b-1)(d-b-1)\\
&=(f-a)(f-b)+(fc+fd-fb-f^2-2f-bc-bd+b^2+bf+2b)\\
&-(cd-cb-c-bd+b^2+b-d+b+1)\\
&=(f-a)(f-b)+fc+fd-f^2-2f-cd+c+d-1\\
&=(f-a)(f-b)-\big(f^2+(2-c-d)f+(1-c)(1-d)\big)\\
&=(f-a)(f-b)-(1+f-c)(1+f-d)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
&{}_3H_3\left[\begin{matrix}a,b,1+f\\c,d,f\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(f-a)(f-b)-(1+f-c)(1+f-d)}{f}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}\\
&=\lambda\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}
\end{aligned}$$

□

2.3 ${}_5H_5$ の和公式

定理 2.4.

$$\begin{aligned}
&{}_5H_5\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d,e\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1-e,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+2a-b-c-d-e\\1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-b-e,1+a-c-d,1+a-c-e,1+a-d-e\end{matrix}\right]
\end{aligned}$$

証明. ${}_6F_5$ の変換公式

$$\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e\end{matrix};-1\right]\\
&=\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

において、$a \mapsto a-2N,\quad b \mapsto b-N,\quad c \mapsto c-N,\quad d \mapsto d-N,\quad e \mapsto e-N$ とすると、

$$\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix} a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N \\ \frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N \end{matrix}; -1\right] \\
&= \frac{\Gamma(1+a-d-N)\Gamma(1+a-e-N)}{\Gamma(1+a-2N)\Gamma(1+a-d-e)} {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d-N, e-N \\ 1+a-b-N, 1+a-c-N \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&{}_6F_5\left[\begin{matrix} a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N \\ \frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N \end{matrix}; -1\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N\right)_n}{\left(\frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N\right)_n n!} \\
&= \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(-1)^{n+N} \left(a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N\right)_{n+N}}{\left(\frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1\right)_{n+N}} \\
&= \frac{(-1)^N \left(a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N\right)_N}{\left(\frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1\right)_N} \\
&\times \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(a-N, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e\right)_n}{\left(\frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+N\right)_n}
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
&{}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d-N, e-N \\ 1+a-b-N, 1+a-c-N \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c, d-N, e-N)_n}{(1+a-b-N, 1+a-c-N)_n n!} \\
&= \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(1+a-b-c, d-N, e-N)_{n+N}}{(1+a-b-N, 1+a-c-N, 1)_{n+N}} \\
&= \frac{(1+a-b-c, d-N, e-N)_N}{(1+a-b-N, 1+a-c-N, 1)_N} \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(1+a-b-c+N, d, e)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+N)_n}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(a-N, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e\right)_n}{\left(\frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+N\right)_n} \\
&= \frac{(-1)^N \left(\frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1\right)_N}{\left(a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N\right)_N} \\
&\times \frac{(1+a-b-c, d-N, e-N)_N}{(1+a-b-N, 1+a-c-N, 1)_N} \frac{\Gamma(1+a-d-N)\Gamma(1+a-e-N)}{\Gamma(1+a-2N)\Gamma(1+a-d-e)} \\
&\times \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(1+a-b-c+N, d, e)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+N)_n}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^N\left(\frac{a}{2}-N,1+a-b-N,1+a-c-N,1+a-d-N,1+a-e-N,1\right)_N}{\left(a-2N,1+\frac{a}{2}-N,b-N,c-N,d-N,e-N\right)_N}\\
&\times\frac{(1+a-b-c,d-N,e-N)_N}{(1+a-b-N,1+a-c-N,1)_N}\frac{\Gamma(1+a-d-N)\Gamma(1+a-e-N)}{\Gamma(1+a-2N)\Gamma(1+a-d-e)}\\
&=\frac{(-1)^N\left(\frac{a}{2}-N,1+a-d-N,1+a-e-N,1+a-b-c\right)_N}{\left(a-2N,1+\frac{a}{2}-N,b-N,c-N\right)_N}\frac{\Gamma(1+a-d-N)\Gamma(1+a-e-N)}{\Gamma(1+a-2N)\Gamma(1+a-d-e)}\\
&=\frac{a-2N}{a}\frac{(-1)^N(1+a-b-c)_N}{(a-2N,1-b,1-c)_N}\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)}{\Gamma(1+a-2N)\Gamma(1+a-d-e)}\\
&=\frac{(-1)^N(a-2N)}{a}\Gamma\left[\begin{matrix}a-2N,1+a-b-c+N,1-b,1-c,1+a-d,1+a-e\\a-N,1+a-b-c,1-b+N,1-c+N,1+a-2N,1+a-d-e\end{matrix}\right]\\
&=\frac{(-1)^N}{a}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b-c+N,1-b,1-c,1+a-d,1+a-e\\a-N,1+a-b-c,1-b+N,1-c+N,1+a-d-e\end{matrix}\right]
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{(-1)^N}{a\Gamma(a-N)}=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma(1-a+N)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(a-N,1+\frac{a}{2},b,c,d,e\right)_n}{\left(\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+N\right)_n}\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-a+N,1+a-b-c+N,1-b,1-c,1+a-d,1+a-e\\1+a-b-c,1-b+N,1-c+N,1+a-d-e\end{matrix}\right]\\
&\times\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(1+a-b-c+N,d,e)_n}{(1+a-b,1+a-c,1+N)_n}
\end{aligned}$$

ここで、$(1-a)+(1+a-b-c)=(1-b)+(1-c)$ であるから、

$$\begin{aligned}
&{}_5H_5\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d,e\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e\end{matrix};1\right]\\
&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(a-N,1+\frac{a}{2},b,c,d,e\right)_n}{\left(\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+N\right)_n}\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-a+N,1+a-b-c+N,1-b,1-c,1+a-d,1+a-e\\1+a-b-c,1-b+N,1-c+N,1+a-d-e\end{matrix}\right]\\
&\times\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(1+a-b-c+N,d,e)_n}{(1+a-b,1+a-c,1+N)_n}\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1+a-d,1+a-e\\1+a-b-c,1+a-d-e\end{matrix}\right]{}_2H_2\left[\begin{matrix}d,e\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}$$

ここで、Dougall の ${}_2H_2$ 和公式より、

$${}_2H_2\left[\begin{matrix}d,e\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]=\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c,1-d,1-e,1+2a-b-c-d-e\\1+a-b-d,1+a-b-e,1+a-c-d,1+a-c-e\end{matrix}\right]$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_5H_5\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d,e\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1+a-d,1+a-e\\ 1+a-b-c,1+a-d-e\end{matrix}\right]\\
&\times\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c,1-d,1-e,1+2a-b-c-d-e\\ 1+a-b-d,1+a-b-e,1+a-c-d,1+a-c-e\end{matrix}\right]\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1-e,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+2a-b-c-d-e\\ 1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-b-e,1+a-c-d,1+a-c-e,1+a-d-e\end{matrix}\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 2.5.

$$
\begin{aligned}
&{}_4H_4\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};-1\right]\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1+a-b,1+a-c,1+a-d\\ 1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-c-d\end{matrix}\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 2.4 において、$e\to-\infty$ とすればよい。 □

定理 2.6.

$$
\begin{aligned}
&{}_4H_4\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{2\sin\frac{\pi a}{2}}{a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1+a-b,1+a-c,1+a-d,\frac{1+3a}{2}-b-c-d\\ 1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-c-d,\frac{1+a}{2}-b,\frac{1+a}{2}-c,\frac{1+a}{2}-d\end{matrix}\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 2.4 において、$e=\frac{1+a}{2}$ とすればよい。 □

定理 2.7.

$$
\begin{aligned}
&{}_3H_3\left[\begin{matrix}b,c,d\\ 1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]\\
&=\cos\frac{\pi a}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+\frac{3a}{2}-b-c-d\\ 1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-c-d,1+\frac{a}{2}-b,1+\frac{a}{2}-c,1+\frac{a}{2}-d\end{matrix}\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 2.4 において、$e=\frac{a}{2}$ とすればよい。 □

系 2.5.

$$
{}_3H_3\left[\begin{matrix}a,b,c\\ 1-a,1-b,1-c\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)\Gamma(1-a-b-c)}{\Gamma(1-a-b)\Gamma(1-b-c)\Gamma(1-c-a)}
$$

証明. 定理 2.7 において、$a=0$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_3H_3\left[\begin{matrix}b,c,d\\ 1-b,1-c,1-d\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1-b-c-d\\ 1-b-c,1-b-d,1-c-d,1-b\end{matrix}\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$d\mapsto a$ とすればよい。 □

これは以下のようにも書ける。

$$2\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}1,a,b,c\\1-a,1-b,1-c\end{matrix};1\right]=1+\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)\Gamma(1-a-b-c)}{\Gamma(1-a-b)\Gamma(1-b-c)\Gamma(1-c-a)}$$

系 2.6.

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{a}{k}\binom{b}{k}\binom{c}{k}}{\binom{a+k}{k}\binom{b+k}{k}\binom{c+k}{k}}=1+\frac{a!b!c!(a+b+c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!},\qquad a,b,c\in\mathbb{N}_0$$

証明. 系 2.5 において、$a\mapsto -a,\quad b\mapsto -b,\quad c\mapsto -c$ とすると、

$$2{}_4F_3\left[\begin{matrix}-a,-b,-c\\1+a,1+b,1+c\end{matrix};1\right]=1+\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)\Gamma(1+c)\Gamma(1+a+b+c)}{\Gamma(1+a+b)\Gamma(1+b+c)\Gamma(1+c+a)}$$

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a,-b,-c)_k}{(1+a,1+b,1+c)_k}=1+\frac{a!b!c!(a+b+c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}$$

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{a}{k}\binom{b}{k}\binom{c}{k}}{\binom{a+k}{k}\binom{b+k}{k}\binom{c+k}{k}}=1+\frac{a!b!c!(a+b+c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}$$

□

2.4 変換公式

定理 2.8.

$${}_4H_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d\\1-a,1-b,1-c,1-d\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1-d)}{\Gamma(1-c-d)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1-a-b,c,d\\1-a,1-b\end{matrix};1\right]$$

証明. ${}_6F_5$ の変換公式において、

$$\begin{aligned}&{}_6F_5\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e\end{matrix};-1\right]\\&=\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]\end{aligned}$$

$a\to 0$ とすると、

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(1-d)\Gamma(1-e)}{\Gamma(1-d-e)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1-b-c,d,e\\1-b,1-c\end{matrix};1\right]\\&=\lim_{a\to 0}{}_6F_5\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e\end{matrix};-1\right]\\&=\lim_{a\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e\right)_n}{\left(\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e\right)_n n!}\\&=1+2\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+a)_{n-1}\left(1+\frac{a}{2},b,c,d,e\right)_n}{\left(1+\frac{a}{2}\right)_{n-1}(1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e)_n n!}\\&=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(b,c,d,e)_n}{(1-b,1-c,1-d,1-e)_n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(b,c,d,e)_n}{(1-b,1-c,1-d,1-e)_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(b,c,d,e)_{-n}}{(1-b,1-c,1-d,1-e)_{-n}}\\&={}_4H_4\left[\begin{matrix}b,c,d,e\\1-b,1-c,1-d,1-e\end{matrix};-1\right]\end{aligned}$$

ここで、　$c \mapsto a, \quad e \mapsto c$ とすれば、定理を得る。 □

定理 2.9.

$$
\begin{aligned}
{}_3H_3\left[\begin{matrix} a,b,c \\ 1-a,1-b,1-c \end{matrix};-1\right] &= \frac{\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b-c)}{}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}-a,b,c \\ \frac{1}{2},1-a \end{matrix};1\right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-a)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1}{2},a,1-b-c \\ 1-b,1-c \end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

証明. 最初の等号は、定理 2.8 において、$b=\frac{1}{2}$ とすることで得られ、二つ目の等号は、$d=\frac{1}{2}$ とすることで得られる。 □

定理 2.10. $\lambda = 1-c-d-e$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_5H_5\left[\begin{matrix} a,b,c,d,e \\ 1-a,1-b,1-c,1-d,1-e \end{matrix};1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1-c,1-d,1-e,\lambda \\ c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda \end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-a-b,c,d,e \\ 1-a,1-b,1-\lambda \end{matrix};1\right] \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1-a,1-b,1-c,1-d,1-e,-\lambda,1+\lambda-a-b \\ 1-a-b,c,d,e,1+\lambda-a,1+\lambda-b \end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+\lambda-a-b,c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda \\ 1+\lambda,1+\lambda-a,1+\lambda-b \end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

証明. Non-Terminating Whipple の変換公式

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f \end{matrix};1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda \\ 1+a,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda \end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c,d,e,f \\ 1+a-b,1+a-c,1-\lambda \end{matrix};1\right] \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a+\lambda-b-c,-\lambda \\ 1+a,1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda \\ 1+\lambda,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c \end{matrix};1\right] \\
&\lambda = 1+a-d-e-f
\end{aligned}
$$

において、$a \to 0$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_5H_5\left[\begin{matrix} b,c,d,e,f \\ 1-b,1-c,1-d,1-e,1-f \end{matrix};1\right] \\
&= \lim_{a\to 0}{}_7F_6\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f \end{matrix};1\right] \\
&= \lim_{a\to 0}\Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda \\ 1+a,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda \end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c,d,e,f \\ 1+a-b,1+a-c,1-\lambda \end{matrix};1\right] \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a+\lambda-b-c,-\lambda \\ 1+a,1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda \\ 1+\lambda,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c \end{matrix};1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1-d,1-e,1-f,\lambda \\ d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda \end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-b-c,d,e,f \\ 1-b,1-c,1-\lambda \end{matrix};1\right] \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1-b,1-c,1-d,1-e,1-f,-\lambda,1+\lambda-b-c \\ 1-b-c,d,e,f,1+\lambda-b,1+\lambda-c \end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+\lambda-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda \\ 1+\lambda,1+\lambda-b,1+\lambda-c \end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$c \mapsto a, \quad f \mapsto c$ とすると、$\lambda = 1-c-d-e$ となって、定理を得る。 □

定理 2.11. $\lambda = 1+a-d-e-f$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_6H_6\left[\begin{matrix} 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, f \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f \end{matrix}; -1\right] \\
&= \frac{\sin \pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix} 1-b, 1-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f \\ 1+a-b-c \end{matrix}\right] \\
&\times \left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(d+\lambda)\Gamma(e+\lambda)\Gamma(f+\lambda)} {}_3H_3\left[\begin{matrix} d, e, f \\ 1+a-b, 1+a-c, 1-\lambda \end{matrix}; 1\right] \right. \\
&\left. - \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}\Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b, 1+a-c \\ d, e, f, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] {}_3F_2\left[\begin{matrix} d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \\ 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}; 1\right] \right)
\end{aligned}
$$

証明. Non-Terminating Whipple の変換公式

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, f \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f \end{matrix}; 1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, \lambda \\ 1+a, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, f \\ 1+a-b, 1+a-c, 1-\lambda \end{matrix}; 1\right] \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a+\lambda-b-c, -\lambda \\ 1+a, 1+a-b-c, d, e, f, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \\ 1+\lambda, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}; 1\right] \\
&\lambda = 1+a-d-e-f
\end{aligned}
$$

において、$a \mapsto a-2N, \quad b \mapsto b-N, \quad c \mapsto c-N, \quad d \mapsto d-N, \quad e \mapsto e-N, \quad f \mapsto f-N$ とすると、$\lambda \mapsto \lambda + N$ となり、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N, f-N \\ \frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N \end{matrix}; 1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N, \lambda+N \\ 1+a-2N, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d-N, e-N, f-N \\ 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1-\lambda-N \end{matrix}; 1\right] \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N \\ 1+a-2N, 1+a-b-c, d-N, e-N, f-N \end{matrix}\right] \\
&\times \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c+N, -\lambda-N \\ 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c+N, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \\ 1+\lambda+N, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N, f-N \\ \frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N, f-N\right)_n}{\left(\frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N\right)_n n!} \\
&= \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{\left(a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N, f-N\right)_{n+N}}{\left(\frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N, 1\right)_{n+N}} \\
&= \frac{\left(a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N, f-N\right)_N}{\left(\frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N, 1\right)_N} \\
&\times \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{\left(a-N, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, f\right)_n}{\left(\frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+N\right)_n}
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d-N, e-N, f-N \\ 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1-\lambda-N \end{matrix}; 1\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+a-b-c, d-N, e-N, f-N)_n}{(1+a-b-N, 1+a-c-N, 1-\lambda-N)_n n!} \\
&= \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(1+a-b-c, d-N, e-N, f-N)_{n+N}}{(1+a-b-N, 1+a-c-N, 1-\lambda-N, 1)_{n+N}} \\
&= \frac{(1+a-b-c, d-N, e-N, f-N)_N}{(1+a-b-N, 1+a-c-N, 1-\lambda-N, 1)_N} \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(1+a-b-c+N, d, e, f)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1-\lambda, 1+N)_n}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{\infty} \frac{\left(a-N, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, f\right)_n}{\left(\frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+N\right)_n} \\
&= \frac{\left(\frac{a}{2}-N, 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N, 1\right)_N}{\left(a-2N, 1+\frac{a}{2}-N, b-N, c-N, d-N, e-N, f-N\right)_N} \\
&\times \left(\Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N, \lambda+N \\ 1+a-2N, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \end{matrix}\right]\right. \\
&\times \frac{(1+a-b-c, d-N, e-N, f-N)_N}{(1+a-b-N, 1+a-c-N, 1-\lambda-N, 1)_N} \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(1+a-b-c+N, d, e, f)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1-\lambda, 1+N)_n} \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b-N, 1+a-c-N, 1+a-d-N, 1+a-e-N, 1+a-f-N \\ 1+a-2N, 1+a-b-c, d-N, e-N, f-N \end{matrix}\right] \\
&\times \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c+N, -\lambda-N \\ 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left.\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c+N, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \\ 1+\lambda+N, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}; 1\right]\right)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{a}{2}-N,1+a-b-N,1+a-c-N,1+a-d-N,1+a-e-N,1+a-f-N,1\right)_N}{\left(a-2N,1+\frac{a}{2}-N,b-N,c-N,d-N,e-N,f-N\right)_N}\\
&\times\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d-N,1+a-e-N,1+a-f-N,\lambda+N\\1+a-2N,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]\\
&\times\frac{(1+a-b-c,d-N,e-N,f-N)_N}{(1+a-b-N,1+a-c-N,1-\lambda-N,1)_N}\\
&=\frac{\left(\frac{a}{2}-N,1+a-b-c\right)_N}{\left(a-2N,1+\frac{a}{2}-N,b-N,c-N,1-\lambda-N\right)_N}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda+N\\1+a-2N,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]\\
&=\frac{a-2N}{a}\frac{(-1)^N(1+a-b-c)_N}{(a-2N,1-b,1-c,\lambda)_N}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda+N\\1+a-2N,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]\\
&=\frac{1}{a}\frac{(-1)^N(1+a-b-c)_N}{(1-b,1-c)_N}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\a-N,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\frac{(1+a-b-c)_N}{(1-b,1-c)_N}\Gamma\left[\begin{matrix}1-a+N,1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-a+N,1+a-b-c+N,1-b,1-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\1-b+N,1-c+N,1+a-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{a}{2}-N,1+a-b-N,1+a-c-N,1+a-d-N,1+a-e-N,1+a-f-N,1\right)_N}{\left(a-2N,1+\frac{a}{2}-N,b-N,c-N,d-N,e-N,f-N\right)_N}\\
&\times\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b-N,1+a-c-N,1+a-d-N,1+a-e-N,1+a-f-N\\1+a-2N,1+a-b-c,d-N,e-N,f-N\end{matrix}\right]\\
&\times\Gamma\left[\begin{matrix}1+a+\lambda-b-c+N,-\lambda-N\\1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]\\
&=\frac{\left(\frac{a}{2}-N,1\right)_N}{\left(a-2N,1+\frac{a}{2}-N,b-N,c-N\right)_N}\\
&\times\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a+\lambda-b-c+N,-\lambda-N\\1+a-2N,1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]\\
&=\frac{a-2N}{a}\frac{1}{(a-2N,1-b,1-c)_N}\\
&\times\Gamma\left[\begin{matrix}1+N,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a+\lambda-b-c+N,-\lambda-N\\1+a-2N,1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a}\frac{1}{(1-b,1-c)_N} \\
&\times \Gamma\left[\begin{matrix}1+N,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a+\lambda-b-c+N,-\lambda-N\\ a-N,1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right] \\
&= -\frac{\sin\pi a}{\pi a}\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\frac{1}{(1-b,1-c)_N} \\
&\times \Gamma\left[\begin{matrix}1+N,1-a+N,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+a+\lambda-b-c+N\\ 1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c,1+\lambda+N\end{matrix}\right] \\
&= -\frac{\sin\pi a}{\pi a}\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\Gamma\left[\begin{matrix}1+N,1-a+N,1+a+\lambda-b-c+N\\ 1-b+N,1-c+N,1+\lambda+N\end{matrix}\right] \\
&\times \Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\\ 1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{\left(a-N,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f\right)_n}{\left(\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+N\right)_n} \\
&= \frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-a+N,1+a-b-c+N,1-b,1-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\ 1-b+N,1-c+N,1+a-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right] \\
&\times \sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(1+a-b-c+N,d,e,f)_n}{(1+a-b,1+a-c,1-\lambda,1+N)_n} \\
&- \frac{\sin\pi a}{\pi a}\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\Gamma\left[\begin{matrix}1+N,1-a+N,1+a+\lambda-b-c+N\\ 1-b+N,1-c+N,1+\lambda+N\end{matrix}\right] \\
&\times \Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\\ 1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a+\lambda-b-c+N,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\ 1+\lambda+N,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$N\to\infty$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_6H_6\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\end{matrix};-1\right]\\
&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{\left(a-N,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f\right)_n}{\left(\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,1+N\right)_n}\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-a+N,1+a-b-c+N,1-b,1-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\ 1-b+N,1-c+N,1+a-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]\\
&\times\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(1+a-b-c+N,d,e,f)_n}{(1+a-b,1+a-c,1-\lambda,1+N)_n}\\
&-\lim_{N\to\infty}\frac{\sin\pi a}{\pi a}\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\Gamma\left[\begin{matrix}1+N,1-a+N,1+a+\lambda-b-c+N\\ 1-b+N,1-c+N,1+\lambda+N\end{matrix}\right]\\
&\times\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\\ 1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]\\
&\times{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a+\lambda-b-c+N,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\ 1+\lambda+N,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f,\lambda\\ 1+a-b-c,d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\end{matrix}\right]{}_3H_3\left[\begin{matrix}d,e,f\\ 1+a-b,1+a-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&-\frac{\sin\pi a}{\pi a}\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\\ 1+a-b-c,d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]\\
&\times{}_3F_2\left[\begin{matrix}d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\ 1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\\ 1+a-b-c\end{matrix}\right]\\
&\times\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(d+\lambda)\Gamma(e+\lambda)\Gamma(f+\lambda)}{}_3H_3\left[\begin{matrix}d,e,f\\ 1+a-b,1+a-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\right.\\
&\left.-\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c\\ d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\ 1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]\right)
\end{aligned}
$$

□

第 3 章

多変数超幾何級数

3.1 Appell 超幾何級数の定義

定義 3.1.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b_1)_n(b_2)_m}{(c)_{n+m}n!m!}x^ny^m \tag{3.1}$$

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b_1)_n(b_2)_m}{(c_1)_n(c_2)_mn!m!}x^ny^m \tag{3.2}$$

$$F_3\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a_1,b_1)_n(b_1,b_2)_m}{(c)_{n+m}n!m!}x^ny^m \tag{3.3}$$

$$F_4\left[\begin{matrix}a,b\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a,b)_{n+m}}{(c_1)_n(c_2)_mn!m!}x^ny^m \tag{3.4}$$

3.2 F_1

まず、以下のように展開できる。

定理 3.1.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c)_nn!}x^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}a+n,b_2\\c+n\end{matrix};y\right]$$

証明.

$$\begin{aligned}F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b_1)_n(b_2)_m}{(c)_{n+m}n!m!}x^ny^m\\&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n(a+n,b_2)_m}{(c)_n(c+n)_mn!m!}x^ny^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c)_nn!}x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a+n,b_2)_m}{(c+n)_mm!}y^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c)_nn!}x^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}a+n,b_2\\c+n\end{matrix};y\right]\end{aligned}$$

□

F_2, F_3, F_4 についても同様の式ができる。

定理 3.2. F_1 の積分表示

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b_1}(1-yt)^{-b_2}\,dt$$

証明.

$$\begin{aligned}F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c)_n n!}x^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}a+n,b_2\\c+n\end{matrix};y\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c)_n n!}x^n\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a+n-1}(1-t)^{c-a-1}(1-yt)^{-b_2}\,dt\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-yt)^{-b_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b_1)_n}{n!}(tx)^n\,dt\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b_1}(1-yt)^{-b_2}\,dt\end{aligned}$$

□

定理 3.3.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,x\right]={}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_1+b_2\\c\end{matrix};x\right]$$

証明. F_1 の積分表示より、

$$\begin{aligned}F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,x\right]&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b_1}(1-xt)^{-b_2}\,dt\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b_1-b_2}\,dt\\&={}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_1+b_2\\c\end{matrix};x\right]\end{aligned}$$

□

系 3.1.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};1,1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1-b_2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1-b_2)}$$

証明. 定理 3.3 において、$x=1$ とすると、

$$\begin{aligned}F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};1,1\right]&={}_2F_1\left[\begin{matrix}a;b_1+b_2\\c\end{matrix};1\right]\\&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1-b_2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1-b_2)}\end{aligned}$$

□

定理 3.4.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};1,x\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1)}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_2\\c-b_1\end{matrix};x\right]$$

証明. F_1 の積分表示より、

$$\begin{aligned}F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};1,x\right]&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-t)^{-b_1}(1-xt)^{-b_2}\,dt\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-b_1-1}(1-xt)^{-b_2}\,dt\\&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1)}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_2\\c-b_1\end{matrix};x\right]\end{aligned}$$

□

定理 3.5.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=(1-x)^{-b_1}(1-y)^{-b_2}F_1\left[\begin{matrix}c-a;b_1,b_2\\c\end{matrix};\frac{x}{x-1},\frac{y}{y-1}\right]$$

証明. F_1 の積分表示において、$t\mapsto 1-t$ と置換すると、

$$\begin{aligned}&F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b_1}(1-yt)^{-b_2}\,dt\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{c-a-1}(1-x+xt)^{-b_1}(1-y+yt)^{-b_2}\,dt\\&=(1-x)^{-b_1}(1-y)^{-b_2}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{c-a-1}(1-t)^{a-1}\left(1-\frac{x}{x-1}t\right)^{-b_1}\left(1-\frac{y}{y-1}t\right)^{-b_2}\,dt\\&=(1-x)^{-b_1}(1-y)^{-b_2}F_1\left[\begin{matrix}c-a;b_1,b_2\\c\end{matrix};\frac{x}{x-1},\frac{y}{y-1}\right]\end{aligned}$$

□

定理 3.6.

$$\begin{aligned}F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]&=(1-x)^{c-a-b_1}(1-y)^{-b_2}F_1\left[\begin{matrix}c-a;c-b_1-b_2,b_2\\c\end{matrix};x,\frac{x-y}{1-y}\right] &(3.5)\\&=(1-x)^{-b_1}(1-y)^{c-a-b_2}F_1\left[\begin{matrix}c-a;b_1,c-b_1-b_2\\c\end{matrix};\frac{y-x}{1-x},y\right] &(3.6)\end{aligned}$$

証明. F_1 の積分表示において、$t\mapsto\frac{1-t}{1-xt}$ と置換すると、

$$\begin{aligned}&F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b_1}(1-yt)^{-b_2}\,dt\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-xt}\right)^{a-1}\left(1-\frac{1-t}{1-xt}\right)^{c-a-1}\left(1-x\frac{1-t}{1-xt}\right)^{-b_1}\left(1-y\frac{1-t}{1-xt}\right)^{-b_2}\frac{1-x}{(1-xt)^2}\,dt\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-xt}\right)^{a-1}\left(\frac{t(1-x)}{1-xt}\right)^{c-a-1}\left(\frac{1-x}{1-xt}\right)^{-b_1}\left(\frac{1-y-(x-y)t}{1-xt}\right)^{-b_2}\frac{1-x}{(1-xt)^2}\,dt\\&=(1-x)^{c-a-b_1}(1-y)^{-b_2}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{c-a-1}(1-t)^{a-1}(1-xt)^{b_1+b_2-c}\left(1-\frac{x-y}{1-y}t\right)^{-b_2}\,dt\\&=(1-x)^{c-a-b_1}(1-y)^{-b_2}F_1\left[\begin{matrix}c-a;c-b_1-b_2,b_2\\c\end{matrix};x,\frac{x-y}{1-y}\right]\end{aligned}$$

同様に $t \mapsto \frac{1-t}{1-xt}$ と置換すると、二つ目の式を得る。 □

定理 3.7.

$$F_1\left[\begin{matrix}a; b_1, b_2\\ c\end{matrix}; x, y\right] = (1-x)^{-a} F_1\left[\begin{matrix}a; c-b_1-b_2, b_2\\ c\end{matrix}; \frac{x}{x-1}, \frac{y-x}{1-x}\right] \tag{3.7}$$

$$= (1-y)^{-a} F_1\left[\begin{matrix}a; b_1, c-b_1-b_2\\ c\end{matrix}; \frac{x-y}{1-y}, \frac{y}{y-1}\right] \tag{3.8}$$

証明. 定理 3.6 の最初の式に、さらに定理 3.5 を適用すると、

$$\begin{aligned}
&F_1\left[\begin{matrix}a; b_1, b_2\\ c\end{matrix}; x, y\right]\\
&= (1-x)^{c-a-b_1}(1-y)^{-b_2} F_1\left[\begin{matrix}c-a; c-b_1-b_2, b_2\\ c\end{matrix}; x, \frac{x-y}{1-y}\right]\\
&= (1-x)^{c-a-b_1}(1-y)^{-b_2}(1-x)^{b_1+b_2-c}\left(1-\frac{x-y}{1-y}\right)^{-b_2} F_1\left[\begin{matrix}a; c-b_1-b_2, b_2\\ c\end{matrix}; \frac{x}{x-1}, \frac{\frac{x-y}{1-y}}{\frac{x-y}{1-y}-1}\right]\\
&= (1-x)^{b_2-a}(1-y)^{-b_2}\left(\frac{1-x}{1-y}\right)^{-b_2} F_1\left[\begin{matrix}a; c-b_1-b_2, b_2\\ c\end{matrix}; \frac{x}{x-1}, \frac{y-x}{1-x}\right]\\
&= (1-x)^{-a} F_1\left[\begin{matrix}a; c-b_1-b_2, b_2\\ c\end{matrix}; \frac{x}{x-1}, \frac{y-x}{1-x}\right]
\end{aligned}$$

もう一つは、定理 3.6 の二つ目の式に、定理 3.5 を適用すると得られる。 □

定理 3.8.

$$F_1\left[\begin{matrix}a; b, c-b\\ c\end{matrix}; x, y\right] = (1-y)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}; \frac{x-y}{1-y}\right]$$

証明. 定理 3.7 において、$b_1 \mapsto b, \quad b_2 \mapsto c-b$ とすれば、

$$\begin{aligned}
F_1\left[\begin{matrix}a; b, c-b\\ c\end{matrix}; x, y\right] &= (1-y)^{-a} F_1\left[\begin{matrix}a; b, 0\\ c\end{matrix}; \frac{x-y}{1-y}, \frac{y}{y-1}\right]\\
&= (1-y)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}; \frac{x-y}{1-y}\right]
\end{aligned}$$

□

系 3.2.

$$F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}; x, y\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}; \frac{y-x}{1-x}\right]$$

証明. 定理 3.8 において、$a = b = \frac{1}{2}, \quad c = 1$ とすればよい。 □

定理 3.9.

$$F_1\left[\begin{matrix}a; b_1, b_2\\ c\end{matrix}; x, y\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a, b_1)_n}{(c)_n n!}x^n {}_2F_1\left[\begin{matrix}b_2, -n\\ 1-n-b_1\end{matrix}; \frac{y}{x}\right]$$

証明.

$$
\begin{aligned}
F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right] &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b_1)_n(b_2)_m}{(c)_{n+m}n!m!}x^n y^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(b_1)_{n-k}(b_2)_k}{k!(n-k)!}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c)_n n!}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(b_2,-n)_k}{(1-n-b_1)_k k!}\left(\frac{y}{x}\right)^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c)_n n!}x^n {}_2F_1\left[\begin{matrix}b_2,-n\\1-n-b_1\end{matrix};\frac{y}{x}\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 3.10.

$$
F_1\left[\begin{matrix}a;b,b\\c\end{matrix};x,-x\right] = {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b\\\frac{c}{2},\frac{1+c}{2}\end{matrix};x^2\right]
$$

証明. 定理 3.9 を用いる。左辺は偶関数より、

$$
F_1\left[\begin{matrix}a;b,b\\c\end{matrix};x,-x\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_{2n}}{(c)_{2n}(2n)!}x^{2n}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-2n,b\\1-2n-b\end{matrix};-1\right]
$$

ここで、Kummer の定理より、

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}-2n,b\\1-2n-b\end{matrix};-1\right] &= \lim_{x\to-2n}\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)} \\
&= (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(1-2n-b)_n} \\
&= \frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{(b+n)_n} \\
&= \frac{(2n)!(b)_n}{n!(b)_{2n}}
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
F_1\left[\begin{matrix}a;b,b\\c\end{matrix};x,-x\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_{2n}}{(c)_{2n}(2n)!}x^{2n}\frac{(2n)!(b)_n}{n!(b)_{2n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2n}(b)_n}{(c)_{2n}n!}x^{2n} \\
&= {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b\\\frac{c}{2},\frac{1+c}{2}\end{matrix};x^2\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 3.11.

$$
F_1\left[\begin{matrix}a;b,b\\1+a-b\end{matrix};e^{\frac{2\pi i}{3}},e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{3}-b\right)}
$$

証明. F_1 の積分表示より、

$$\begin{aligned}F_1\left[\begin{matrix}a;b,b\\1+a-b\end{matrix};e^{\frac{2\pi i}{3}},e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right]&=\frac{\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-b}(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}t)^{-b}(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}}t)^{-b}\,dt\\&=\frac{\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t^3)^{-b}\,dt\\&=\frac{\Gamma(1+a-b)}{3\Gamma(a)\Gamma(1-b)}\int_0^1 t^{a/3-1}(1-t)^{-b}\,dt\\&=\frac{\Gamma(1+a-b)}{3\Gamma(a)\Gamma(1-b)}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{3}\right)\Gamma(1-b)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}-b\right)}\\&=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{3}-b\right)}\end{aligned}$$

□

これは実部をとって、以下のようにも書ける。

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b)_n(b)_m}{(1+a-b)_{n+m}n!m!}\cos\frac{2\pi(n-m)}{3}=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{3}-b\right)}$$

系 3.3.

$$\sum_{i,j=0}^{m}\frac{\binom{3n}{i+j}\binom{m}{i}\binom{m}{j}}{\binom{m-3n+i+j}{i+j}}\cos\frac{2\pi(i-j)}{3}=\frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{3n}}$$

証明. 定理 3.11 において、$a\to -3n,\quad b\to -m$ とすると、

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-3n)_{i+j}(-m)_i(-m)_j}{(1-3n+m)_{i+j}i!j!}\cos\frac{2\pi(i-j)}{3}=\lim_{a\to-3n}\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1+a+m)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{3}+m\right)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\binom{3n}{i+j}\binom{m}{i}\binom{m}{j}}{\binom{m-3n+i+j}{i+j}}\cos\frac{2\pi(i-j)}{3}&=\lim_{a\to-3n}\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1-3n+m)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1-n+m\right)}\\&=\frac{(m-3n)!}{(m-n)!}\lim_{a\to-3n}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{a}{3}\right)\Gamma(1-a)}{3\Gamma(a)\Gamma(1-a)\Gamma\left(1-\frac{a}{3}\right)}\\&=\frac{(m-3n)!}{(m-n)!}\lim_{a\to-3n}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{a}{3}\right)\Gamma(1-a)}{3\Gamma(a)\Gamma(1-a)\Gamma\left(1-\frac{a}{3}\right)}\\&=\frac{(m-3n)!}{(m-n)!}\lim_{a\to-3n}\frac{\sin\pi a}{3\sin\frac{\pi}{3}}\frac{(3n)!}{n!}\\&=\frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{3n}}\lim_{a\to-3n}\frac{\sin\pi a}{3\sin\frac{\pi}{3}}\\&=\frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{3n}}\end{aligned}$$

□

次の等式は個人的に好きである。

系 3.4.

$$\sum_{i,j=0}^{3n}\binom{3n}{i+j}\binom{3n}{i}\binom{3n}{j}\cos\frac{2\pi(i-j)}{3}=\binom{3n}{n}$$

証明. 系 3.3 において、$m=3n$ とすればよい。 $\square$

定理 3.12.

$$F_1\left[\begin{matrix}1-a;a,a\\c\end{matrix};\frac{e^{i\pi/6}}{\sqrt{3}},\frac{e^{-i\pi/6}}{\sqrt{3}}\right]=3^a\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{2+a+c}{3}\right)}{\Gamma(a+c)\Gamma\left(\frac{2-2a+c}{3}\right)}$$

証明. 定理 3.11

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b,b\\1+a-b\end{matrix};e^{\frac{2\pi i}{3}},e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right]=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{3}-b\right)}$$

の左辺に定理 3.5 を適用すると、

$$(1-e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-b}(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}})^{-b}F_1\left[\begin{matrix}1-b;b,b\\1+a-b\end{matrix};\frac{e^{2\pi i/3}}{e^{2\pi i/3}-1},\frac{e^{-2\pi i/3}}{e^{-2\pi i/3}-1}\right]=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{3}-b\right)}$$

ここで、

$$\begin{aligned}&(1-e^{\frac{2\pi i}{3}})^{-b}(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}})^{-b}=(1+1+1)^{-b}=3^{-b}\\&\frac{e^{2\pi i/3}}{e^{2\pi i/3}-1}=\frac{e^{\pi i/3}}{2i\sin\frac{\pi}{3}}=-\frac{ie^{\pi i/3}}{\sqrt{3}}=\frac{e^{-\pi/6}}{\sqrt{3}}\\&\frac{e^{-2\pi i/3}}{e^{-2\pi i/3}-1}=-\frac{e^{-\pi i/3}}{2i\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{ie^{-\pi i/3}}{\sqrt{3}}=\frac{e^{\pi/6}}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

より、

$$F_1\left[\begin{matrix}1-b;b,b\\1+a-b\end{matrix};\frac{e^{i\pi/6}}{\sqrt{3}},\frac{e^{-i\pi/6}}{\sqrt{3}}\right]=3^b\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{3}-b\right)}$$

ここで、$a\mapsto b+c-1$ とすると、

$$F_1\left[\begin{matrix}1-b;b,b\\c\end{matrix};\frac{e^{i\pi/6}}{\sqrt{3}},\frac{e^{-i\pi/6}}{\sqrt{3}}\right]=3^b\frac{\Gamma\left(\frac{2+b+c}{3}\right)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)\Gamma\left(\frac{2-2b+c}{3}\right)}$$

ここで、$b\mapsto a$ として、定理を得る。 $\square$

系 3.5.

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{(2n+2m-1)!!}{(2n+2m)!!}\frac{\cos\frac{\pi}{6}(n-m)}{3^{\frac{n+m}{2}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\pi}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

証明. 定理 3.12 において、$a=\frac{1}{2},\quad c=1$ とすると、

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{(2n+2m-1)!!}{(2n+2m)!!}\frac{\cos\frac{\pi}{6}(n-m)}{3^{\frac{n+m}{2}}}\\&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_m\left(\frac{1}{2}\right)_{n+m}}{n!m!(n+m)!}\frac{\cos\frac{\pi}{6}(n-m)}{3^{\frac{n+m}{2}}}\\&=F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2}\\1\end{matrix};\frac{e^{\pi/6}}{\sqrt{3}},\frac{e^{-\pi/6}}{\sqrt{3}}\right]\\&=3^{1/2}\frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\pi}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\end{aligned}$$

$\square$

3.3 F_2

定理 3.13.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}(1-xt)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_2\\c_2\end{matrix};\frac{y}{1-xt}\right]dt$$

証明.

$$\begin{aligned}F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b_1)_n(b_2)_m}{(c_1)_n(c_2)_m n!m!}x^n y^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_2)_n}{(c_2)_n n!}y^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}a+n,b_1\\c_1\end{matrix};x\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_2)_n}{(c_2)_n n!}y^n\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c-b_1-1}(1-xt)^{-a-n}\,dt\\&=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c-b_1-1}(1-xt)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_2)_n}{(c_2)_n n!}y^n(1-xt)^{-n}\,dt\\&=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}(1-xt)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_2\\c_2\end{matrix};\frac{y}{1-xt}\right]dt\end{aligned}$$

□

定理 3.14. F_2 の積分表示

$$\begin{aligned}F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]&=\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1)\Gamma(c_2-b_2)}\\\times\int_0^1\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}s^{b_2-1}(1-s)^{c_2-b_2-1}(1-xt-ys)^{-a}\,dtds\end{aligned}$$

証明. 定理 3.13 より、

$$\begin{aligned}F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]&=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}(1-xt)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_2\\c_2\end{matrix};\frac{y}{1-xt}\right]dt\\&=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}(1-xt)^{-a}\\&\times\left(\frac{\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2-b_2)}\int_0^1 s^{b_2-1}(1-s)^{c_2-b_2-1}\left(1-\frac{y}{1-xt}s\right)^{-a}ds\right)dt\\&=\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1)\Gamma(c_2-b_2)}\\&\times\int_0^1\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}s^{b_2-1}(1-s)^{c_2-b_2-1}(1-xt-ys)^{-a}\,dtds\end{aligned}$$

□

定理 3.15.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]=(1-x)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;c_1-b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{x}{x-1},\frac{y}{1-x}\right] \tag{3.9}$$

$$=(1-y)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,c_2-b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{x}{1-y},\frac{y}{y-1}\right] \tag{3.10}$$

$$=(1-x-y)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;c_1-b_1,c_2-b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{x}{x+y-1},\frac{y}{x+y-1}\right] \tag{3.11}$$

証明. F_2 の積分表示において、$t\mapsto 1-t$ と置換すると、

$$\begin{aligned}
&F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]=\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1)\Gamma(c_2-b_2)}\\
&\times\int_0^1\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}s^{b_2-1}(1-s)^{c_2-b_2-1}(1-xt-ys)^{-a}\,dtds\\
&=\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1)\Gamma(c_2-b_2)}\\
&\times\int_0^1\int_0^1 (1-t)^{b_1-1}t^{c_1-b_1-1}s^{b_2-1}(1-s)^{c_2-b_2-1}(1-x+xt-ys)^{-a}\,dtds\\
&=(1-x)^{-a}\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1)\Gamma(c_2-b_2)}\\
&\times\int_0^1\int_0^1 t^{c_1-b_1-1}(1-t)^{b_1-1}s^{b_2-1}(1-s)^{c_2-b_2-1}\left(1-\frac{x}{x-1}t-\frac{y}{1-x}s\right)^{-a}\,dtds\\
&=(1-x)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;c_1-b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{x}{x-1},\frac{y}{1-x}\right]
\end{aligned}$$

同様に $s\mapsto 1-s$ とすることで、二つ目の式を得る。また、一つ目の式と二つ目の式を両方用いることにより、

$$\begin{aligned}
F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]&=(1-x)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;c_1-b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{x}{x-1},\frac{y}{1-x}\right]\\
&=(1-x)^{-a}\left(1-\frac{y}{1-x}\right)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;c_1-b_1,c_2-b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{\frac{x}{x-1}}{1-\frac{y}{1-x}},\frac{\frac{y}{1-x}}{\frac{y}{1-x}-1}\right]\\
&=(1-x-y)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;c_1-b_1,c_2-b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{x}{x+y-1},\frac{y}{x+y-1}\right]
\end{aligned}$$

□

系 3.6.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b,-\\c,-\end{matrix};x,y\right]=(1-y)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{x}{1-y}\right]$$

証明. 定理 3.15 の二つ目の式より、適当に d をとって、

$$\begin{aligned}
F_2\left[\begin{matrix}a;b,-\\c,-\end{matrix};x,y\right]&=F_2\left[\begin{matrix}a;b,d\\c,d\end{matrix};x,y\right]\\
&=(1-y)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;b,0\\c,d\end{matrix};\frac{x}{1-y},\frac{y}{y-1}\right]\\
&=(1-y)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{x}{1-y}\right]
\end{aligned}$$

□

定理 3.16.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c_1)_n n!}x^n\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}b_2,1-n-c_1,-n\\c_2,1-n-b_1\end{matrix};-\frac{y}{x}\right]$$

証明.

$$\begin{aligned}F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b_1)_n(b_2)_m}{(c_1)_n(c_2)_m n!m!}x^n y^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\sum_{k=0}^{n}\frac{(b_1)_{n-k}(b_2)_k}{(c_1)_{n-k}(c_2)_k k!(n-k)!}x^{n-k}y^k\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c_1)_n n!}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(b_2,1-n-c_1,-n)_k}{(c_2,1-n-b_1)_k}\left(-\frac{y}{x}\right)^k\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c_1)_n n!}x^n\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}b_2,1-n-c_1,-n\\c_2,1-n-b_1\end{matrix};-\frac{y}{x}\right]\end{aligned}$$

□

定理 3.17.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b,b\\c,c\end{matrix};x,-x\right]={}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b,c-b\\\frac{c}{2},\frac{1+c}{2},c\end{matrix};x^2\right]$$

証明. 定理 3.16 を用いる。左辺は偶関数より、

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b,b\\c,c\end{matrix};x,-x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_{2n}}{(c)_{2n}(2n)!}x^{2n}{}_3F_2\left[\begin{matrix}-2n,b,1-2n-c\\1-2n-b,c\end{matrix};1\right]$$

ここで、Dixon の恒等式より、

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left[\begin{matrix}-2n,b,1-2n-c\\1-2n-b,c\end{matrix};1\right]&=\lim_{a\to-2n}\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1-2n-b)\Gamma(c)\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1-n-b)\Gamma(c+n)\Gamma(c-b)}\\&=\frac{(-1)^n(2n)!(c-b)_n}{n!(1-2n-b,c)_n}\\&=\frac{(2n)!(c-b)_n}{(b+n,c)_n n!}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}F_2\left[\begin{matrix}a;b,b\\c,c\end{matrix};x,-x\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_{2n}}{(c)_{2n}(2n)!}x^{2n}\frac{(2n)!(c-b)_n}{(b+n,c)_n n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2n}(b,c-b)_n}{(c)_{2n}(c)_n n!}x^{2n}\\&={}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b,c-b\\\frac{c}{2},\frac{1+c}{2},c\end{matrix};x^2\right]\end{aligned}$$

□

系 3.7.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b,b\\a,a\end{matrix};x,-x\right]={}_2F_1\left[\begin{matrix}b,a-b\\a\end{matrix};x^2\right]$$

証明. 定理 3.17 において、$c=a$ とすればよい。 □

3.4 F_3

定理 3.18.

$$F_3\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c-a_1)}\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{c-a_1-1}(1-xt)^{-b_1}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a_2,b_2\\c-a_1\end{matrix};(1-t)y\right]dt$$

証明.

$$\begin{aligned}
F_3\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a_1,b_1)_n(a_2,b_2)_m}{(c)_{n+m}n!m!}x^ny^m\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_2,b_2)_n}{(c)_nn!}y^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}a_1,b_1\\c+n\end{matrix};x\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_2,b_2)_n}{(c)_nn!}y^n\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c-a_1+n)}\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{c-a_1+n-1}(1-xt)^{-b_1}\,dt\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c-a_1)}\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{c-a_1-1}(1-xt)^{-b_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_2,b_2)_n}{(c-a_1)_nn!}(1-t)^ny^n\,dt\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c-a_1)}\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{c-a_1-1}(1-xt)^{-b_1}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a_2,b_2\\c-a_1\end{matrix};(1-t)y\right]dt
\end{aligned}$$

□

定理 3.19. F_3 の積分表示

$$\begin{aligned}
F_3\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(c-a_1-a_2)}\\
\times\int_{0\le t+s\le 1,0\le s,0\le t}&t^{a_1-1}s^{a_2-1}(1-xt)^{-b_1}(1-ys)^{-b_2}(1-t-s)^{c-a_1-a_2-1}\,dtds
\end{aligned}$$

証明. 定理 3.19 より、

$$\begin{aligned}
&F_3\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c-a_1)}\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{c-a_1-1}(1-xt)^{-b_1}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a_2,b_2\\c-a_1\end{matrix};(1-t)y\right]dt\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c-a_1)}\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{c-a_1-1}(1-xt)^{-b_1}\\
&\times\left(\frac{\Gamma(c-a_1)}{\Gamma(a_2)\Gamma(c-a_1-a_2)}\int_0^1 s^{a_2-1}(1-s)^{c-a_1-a_2-1}(1-(1-t)ys)^{-b_2}\,ds\right)dt\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(c-a_1-a_2)}\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{c-a_1-1}(1-xt)^{-b_1}\\
&\times\left(\int_0^1 s^{a_2-1}(1-s)^{c-a_1-a_2-1}(1-(1-t)ys)^{-b_2}\,ds\right)dt
\end{aligned}$$

ここで、$s \mapsto \frac{s}{1-t}$ として、

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 s^{a_2-1}(1-s)^{c-a_1-a_2-1}(1-(1-t)ys)^{-b_2}\,ds \\
&= \int_0^{1-t} \left(\frac{s}{1-t}\right)^{a_2-1} \left(1-\frac{s}{1-t}\right)^{c-a_1-a_2-1} (1-ys)^{-b_2} \frac{ds}{1-t} \\
&= (1-t)^{1+a_1-c} \int_0^{1-t} s^{a_2-1}(1-t-s)^{c-a_1-a_2-1}(1-ys)^{-b_2}\,ds
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
&F_3\left[\begin{matrix} a_1, a_2; b_1, b_2 \\ c \end{matrix}; x, y\right] \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(c-a_1-a_2)} \int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{c-a_1-1}(1-xt)^{-b_1} \\
&\times \left((1-t)^{1+a_1-c} \int_0^{1-t} s^{a_2-1}(1-t-s)^{c-a_1-a_2-1}(1-ys)^{-b_2}\,ds\right) dt \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(c-a_1-a_2)} \\
&\times \int_{0 \le t+s \le 1} t^{a_1-1}s^{a_2-1}(1-xt)^{-b_1}(1-ys)^{-b_2}(1-t-s)^{c-a_1-a_2-1}\,dtds
\end{aligned}
$$

□

定理 3.20.

$$
F_3\left[\begin{matrix} a, c-a; b_1, b_2 \\ c \end{matrix}; x, y\right] = (1-y)^{-b_2} F_1\left[\begin{matrix} a; b_1, b_2 \\ c \end{matrix}; x, \frac{y}{y-1}\right]
$$

証明. Pfaff の変換公式より、

$$
\begin{aligned}
F_3\left[\begin{matrix} a, c-a; b_1, b_2 \\ c \end{matrix}; x, y\right] &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(a,b_1)_n}{(c)_n n!} x^n {}_2F_1\left[\begin{matrix} c-a, b_2 \\ c+n \end{matrix}; y\right] \\
&= (1-y)^{-b_2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(a,b_1)_n}{(c)_n n!} x^n {}_2F_1\left[\begin{matrix} a+n, b_2 \\ c+n \end{matrix}; \frac{y}{y-1}\right] \\
&= (1-y)^{-b_2} F_1\left[\begin{matrix} a; b_1, b_2 \\ c \end{matrix}; x, \frac{y}{y-1}\right]
\end{aligned}
$$

□

これより、F_3 が F_1 を特別な場合として含んでいると見なせる。

定理 3.21.

$$
F_3\left[\begin{matrix} a, c-a; b, c-b \\ c \end{matrix}; x, y\right] = (1-y)^{a+b-c} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x+y-xy\right]
$$

証明. 定理 3.20 と、定理 3.8 より、

$$\begin{aligned}F_3\left[\begin{matrix}a,c-a;b,c-b\\c\end{matrix};x,y\right]&=(1-y)^{b-c}F_1\left[\begin{matrix}a;b,c-b\\c\end{matrix};x,\frac{y}{y-1}\right]\\&=(1-y)^{b-c}\left(1-\frac{y}{y-1}\right)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{x-\frac{y}{y-1}}{1-\frac{y}{y-1}}\right]\\&=(1-y)^{a+b-c}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};x+y-xy\right]\end{aligned}$$

□

系 3.8.

$$F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};x,y\right]={}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};x+y-xy\right]$$

証明. 定理 3.21 において、$a=b=\frac{1}{2},\quad c=1$ とすればよい。 □

3.5 F_4

定理 3.22.

$$F_4\left[\begin{matrix}a,b\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c_1)_n n!}x^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}1-n-c_1,-n\\c_2\end{matrix};\frac{y}{x}\right]$$

証明.

$$\begin{aligned}F_4\left[\begin{matrix}a,b\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a,b)_{n+m}}{(c_1)_n(c_2)_m n!m!}x^ny^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(a,b)_n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(c_1)_{n-k}(c_2)_k k!(n-k)!}x^{n-k}y^k\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c_1)_n n!}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-n-c_1,-n)_k}{(c_2)_k k!}\left(\frac{y}{x}\right)^k\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c_1)_n n!}x^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}1-n-c_1,-n\\c_2\end{matrix};\frac{y}{x}\right]\end{aligned}$$

□

定理 3.23.

$$F_4\left[\begin{matrix}a,b\\c_1,c_2\end{matrix};x,x\right]={}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,\frac{c_1+c_2-1}{2},\frac{c_1+c_2}{2}\\c_1,c_2,c_1+c_2-1\end{matrix};4x\right]$$

証明. 定理 3.22 より、

$$\begin{aligned} F_4\left[\begin{matrix}a,b\\c_1,c_2\end{matrix};x,x\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c_1)_n n!}x^n {}_2F_1\left[\begin{matrix}1-n-c_1,-n\\c_2\end{matrix};1\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(c_1)_n n!}x^n\frac{(c_1+c_2+n-1)_n}{(c_2)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n(c_1+c_2-1)_{2n}}{(c_1,c_2,c_1+c_2-1)_n n!}x^n \\ &= {}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,\frac{c_1+c_2-1}{2},\frac{c_1+c_2}{2}\\c_1,c_2,c_1+c_2-1\end{matrix};4x\right] \end{aligned}$$

□

系 3.9.

$$F_4\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,1\end{matrix};x,x\right] = {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1,1\end{matrix};4x\right]$$

証明. 定理 3.23 において、$a=b=\frac{1}{2},\quad c_1=c_2=1$ とすればよい。 □

3.6 Lauricella 超幾何級数

これは Appell の級数の一般化である。

定義 3.2.

$$F_A^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\ldots,b_n\\c_1,\ldots,c_n\end{matrix};z_1,\ldots,z_n\right] = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{i_1+\cdots,i_n}(b_1)_{i_1}\cdots(b_n)_{i_n}}{(c_1)_{i_1}\cdots(c_n)_{i_n}i_1!\cdots i_n!}z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \tag{3.12}$$

$$F_B^{(n)}\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n\\c\end{matrix};z_1,\ldots,z_n\right] = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{i_1}\cdots(a_n)_{i_n}(b_1)_{i_1}\cdots(b_n)_{i_n}}{(c)_{i_1+\cdots+i_n}i_1!\cdots i_n!}z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \tag{3.13}$$

$$F_C^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b\\c_1,\ldots,c_n\end{matrix};z_1,\ldots,z_n\right] = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{i_1+\cdots,i_n}(b)_{i_1+\cdots+i_n}}{(c_1)_{i_1}\cdots(c_n)_{i_n}i_1!\cdots i_n!}z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \tag{3.14}$$

$$F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\ldots,b_n\\c\end{matrix};z_1,\ldots,z_n\right] = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{i_1+\cdots,i_n}(b_1)_{i_1}\cdots(b_n)_{i_n}}{(c)_{i_1+\cdots+i_n}i_1!\cdots i_n!}z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \tag{3.15}$$

Appell の級数との対応は以下の通りである。

$$F_A^{(2)}\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right] = F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right] \tag{3.16}$$

$$F_B^{(2)}\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right] = F_3\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right] \tag{3.17}$$

$$F_C^{(2)}\left[\begin{matrix}a;b\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right] = F_4\left[\begin{matrix}a;b\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right] \tag{3.18}$$

$$F_D^{(2)}\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right] = F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right] \tag{3.19}$$

一般化するとその分難しくなるので、ここでは積分表示が簡単な F_D だけ少し述べてこの節を終わることにする。

定理 3.24. F_D の積分表示

$$F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\c\end{matrix};z_1,\dots,z_n\right]=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-z_1x)^{-b_1}\cdots(1-z_nx)^{-b_n}\,dx$$

証明.

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-z_1x)^{-b_1}\cdots(1-z_nx)^{-b_n}\,dx\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}\sum_{i_1=0}^{\infty}\frac{(b_1)_{i_1}}{i_1!}(z_1x)^{i_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{\infty}\frac{(b_n)_{i_n}}{i_n!}(z_nx)^{i_n}\,dx\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{\infty}\frac{(b_1)_{i_1}\cdots(b_n)_{i_n}}{i_1!\cdots i_n!}z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\int_0^1 x^{a+i_1+\cdots+i_n-1}(1-x)^{c-a-1}\,dx\\
&=\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{i_1+\cdots+i_n}(b_1)_{i_1}\cdots(b_n)_{i_n}}{(c)_{i_1+\cdots+i_n}i_1!\cdots i_n!}z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\\
&=F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\c\end{matrix};z_1,\dots,z_n\right]
\end{aligned}$$

□

定理 3.25.

$$F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\c\end{matrix};z_1,\dots,z_{n-1},1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_n)}F_D^{(n-1)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_{n-1}\\c-b_n\end{matrix};z_1,\dots,z_{n-1}\right]$$

証明. 定理 3.24 より、

$$\begin{aligned}
&F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\c\end{matrix};z_1,\dots,z_{n-1},1\right]\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-z_1x)^{-b_1}\cdots(1-z_{n-1}x)^{-b_{n-1}}(1-x)^{-b_n}\,dx\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-b_n-1}(1-z_1x)^{-b_1}\cdots(1-z_{n-1}x)^{-b_{n-1}}\,dx\\
&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b_n)}{\Gamma(c-b_n)}F_D^{(n-1)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_{n-1}\\c-b_n\end{matrix};z_1,\dots,z_{n-1}\right]\\
&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_n)}F_D^{(n-1)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_{n-1}\\c-b_n\end{matrix};z_1,\dots,z_{n-1}\right]
\end{aligned}$$

□

系 3.10.

$$F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\c\end{matrix};1,\dots,1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1-\cdots-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1-\cdots-b_n)}$$

証明. 定理 3.24 より、

$$
\begin{aligned}
&F_D^{(n)}\left[\begin{matrix} a; b_1, \ldots, b_n \\ c \end{matrix}; 1, \ldots, 1\right] \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-x)^{-b_1} \cdots (1-x)^{-b_n}\, dx \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-b_1-\cdots-b_n-1}\, dx \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b_1-\cdots-b_n)}{\Gamma(c-b_1-\cdots-b_n)} \\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1-\cdots-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1-\cdots-b_n)}
\end{aligned}
$$

□

おわりに

超幾何級数について重要な式の多くは書けたと思う。多変数超幾何級数はまだまだ多くのバリエーションがあり、それらに興味があるので、詳しく研究してみたいと思う。

参考文献

[1] W.N. Bailey - Generalized hypergeometric series, Cambridge University Press, 1935

[2] Bruce C. Berndt - Ramanujan's Notebooks Part II Springer-Verlag New York 1989

[3] Slater L.J. - Generalized hypergeometric functions-Cambridge 1966

[4] George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy - Special functions-Cambridge University Press 1999