超幾何級数 II の定理集

@nkswtr

はじめに

この PDF は超幾何級数 II の定理を参照用にまとめたものである。

目次

第 1 章

超幾何級数の変換公式

1.1 ${}_9F_8$ の変換公式

補題 1.1. $\lambda = 1 + 2a - b - c - d$ としたとき、

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left(\lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, -n\right)_k (a)_{n+k}(a-\lambda)_{n-k}}{\left(\frac{\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d\right)_k (1+\lambda)_{n+k} k!}$$
$$= \frac{(a,b,c,d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d)_n}$$

定理 1.1. $\lambda = 1 + 2a - b - c - d$ としたとき、

$$ {}_{r+5}F_{r+4}\left[\begin{matrix} a, b, c, d, a_1, \ldots, a_r, -n \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, b_1, \ldots, b_{r+1} \end{matrix}; z\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, a_1, \ldots, a_r, -n\right)_k}{\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1+\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, b_1, \ldots, b_{r+1}\right)_k k!} z^k$$
$$\times {}_{r+3}F_{r+2}\left[\begin{matrix} a+2k, a-\lambda, a_1+k, \ldots, a_r+k, k-n \\ 1+\lambda+2k, b_1+k, \ldots, b_{r+1}+k \end{matrix}; z\right]$$

定理 1.2. ${}_9F_8$ の変換公式
$\lambda = 1 + 2a - b - c - d, \quad 2 + 3a + n = b + c + d + e + f + g$ としたとき、

$$ {}_9F_8\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, f, g, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g, 1+a+n \end{matrix}; 1\right]$$
$$= \frac{(1+a, 1+\lambda-e, 1+\lambda-f, 1+\lambda-g)_n}{(1+\lambda, 1+a-e, 1+a-f, 1+a-g)_n}$$
$$\times {}_9F_8\left[\begin{matrix} \lambda, 1+\frac{\lambda}{2}, b+\lambda-a, c+\lambda-a, d+\lambda-a, e, f, g, -n \\ \frac{\lambda}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+\lambda-e, 1+\lambda-f, 1+\lambda-g, 1+\lambda+n \end{matrix}; 1\right]$$

1.2 Non-Terminating Whipple の変換公式

定理 1.3. Non-Terminating Whipple の変換公式

$\lambda = 1 + a - d - e - f$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, f \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f \end{matrix}; 1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, \lambda \\ 1+a, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, f \\ 1+a-b, 1+a-c, 1-\lambda \end{matrix}; 1\right] \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f, 1+a+\lambda-b-c, -\lambda \\ 1+a, 1+a-b-c, d, e, f, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c, d+\lambda, e+\lambda, f+\lambda \\ 1+\lambda, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

定理 1.4. $\lambda = 1 + \frac{a}{2} - d - e$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix}; 1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d, 1+a-e, 1+\frac{a}{2}, \lambda \\ 1+a, d+\lambda, e+\lambda, \frac{a}{2}+\lambda \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e, \frac{a}{2} \\ 1+a-b, 1+a-c, 1-\lambda \end{matrix}; 1\right] \\
&+ \frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, -\lambda, 1+a+\lambda-b-c \\ a, 1+a-b-c, d, e, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a+\lambda-b-c, d+\lambda, e+\lambda, \frac{a}{2}+\lambda \\ 1+\lambda, 1+a+\lambda-b, 1+a+\lambda-c \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

系 1.1.

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix} -2n, b, c, d, e \\ 1-2n-b, 1-2n-c, 1-2n-d, 1-2n-e \end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(1+n, d+e+n)_n}{(d+n, e+n)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-2n-b-c, d, e, -n \\ 1-2n-b, 1-2n-c, d+e+n \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

定理 1.5.

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left[\begin{matrix} a, b, c, d \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d \end{matrix}; 1\right] \\
&= \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-d, 1-2d \\ 1+a-2d, 1-d \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2} \\ 1+a-b, 1+a-c, \frac{1}{2}+d \end{matrix}; 1\right] \\
&+ \frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, d-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}+a-b-c-d \\ a, 1+a-b-c, d, \frac{3}{2}+a-b-d, \frac{3}{2}+a-c-d \end{matrix}\right] \\
&\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{2}+a-b-c-d, \frac{1+a}{2}-d, 1+\frac{a}{2}-d \\ \frac{3}{2}+a-b-d, \frac{3}{2}+a-c-d, \frac{3}{2}-d \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

定理 1.6. $\lambda = 1 + a - c - d - e$ するとき、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, d, e \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right] &= \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-c, 1+a-d-e, \lambda \\ c+\lambda, d+\lambda, e+\lambda \end{matrix}\right] {}_3F_2\left[\begin{matrix} c, d, e \\ 1+a-b, 1-\lambda \end{matrix}; 1\right] \\
&+ \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d-e, -\lambda \\ c, d, e, 1+a+\lambda-b \end{matrix}\right] {}_3F_2\left[\begin{matrix} c+\lambda, d+\lambda, e+\lambda \\ 1+\lambda, 1+a+\lambda-b \end{matrix}; 1\right]
\end{aligned}
$$

定理 1.7. Non-Terminating Saalschütz の和公式
$1+a+b+c=d+e$ とするとき、

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};1\right] &= \Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,1+c-d \\ e-a,e-b,e-c,1-d \end{matrix}\right] \\
&\quad - \Gamma\left[\begin{matrix} e,1+a-d,1+b-d,1+c-d,d-1 \\ a,b,c,1+e-d,1-d \end{matrix}\right] {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-d,1+b-d,1+c-d \\ 2-d,1+e-d \end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

定理 1.8. $2+a+b=c+d$ であるとき、

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,1 \\ c,d \end{matrix};1\right] = \frac{(1-d)(c-1)}{(c-a-1)(c-b-1)} + \frac{1}{(c-a-1)(c-b-1)}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}
$$

1.3 Nearly-poised 超幾何級数の変換公式

定理 1.9.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,w \end{matrix};1\right] = \frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix} 1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},1+a-w,-n \\ 1+a-b,1+a-c,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix};1\right]
$$

定理 1.10.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,1+a+n \end{matrix};1\right] = \frac{(1+n)_n}{(1+a+n)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},-n \\ 1+a-b,1+a-c,\frac{1}{2}-n \end{matrix};1\right]
$$

系 1.2. $\frac{1}{2}+a+n=b+c$ であるとき、

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,-n \\ 1+a-b,1+a-c,1+a+n \end{matrix};1\right] = \frac{\left(\frac{1}{2},1+a\right)_n(1+a-2b)_{2n}}{\left(1+a-b,\frac{1}{2}-b\right)_n(1+a)_{2n}}
$$

定理 1.11.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,-n \\ 1+a-b,w \end{matrix};1\right] = \frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b,1+a-w,-n \\ 1+a-b,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix};1\right]
$$

系 1.3.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,-n \\ 1+a-b,1+2b-n \end{matrix};1\right] = \frac{\left(a-2b,1+\frac{a}{2}-b,-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{a}{2}-b,-2b\right)_n}
$$

定理 1.12.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,-n \\ \frac{a}{2},1+a-b,w \end{matrix};1\right] = \frac{(w-a)_n}{(w)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}-b,\frac{1+a}{2},1+a-w,-n \\ 1+a-b,\frac{1+a-w-n}{2},1+\frac{a-w-n}{2} \end{matrix};1\right]
$$

系 1.4.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,-n \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+2b-n \end{matrix};1\right] = \frac{(a-2b,-b)_n}{(1+a-b,-2b)_n}
$$

系 1.5.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,-n \\ \frac{a}{2},1+a-b,2+2b-n \end{matrix};1\right] = \frac{\left(a-2b-1,\frac{1+a}{2}-b,-1-b\right)_n}{\left(1+a-b,\frac{a-1}{2}-b,-1-2b\right)_n}
$$

定理 1.13.

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix} -n,b,c,d \\ 1-n-b,1-n-c,w \end{matrix};1\right] = \frac{(w-d)_n}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix} d,1-n-b-c,1-n-w,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2} \\ 1-n-b,1-n-c,\frac{1+d-w-n}{2},1+\frac{d-w-n}{2} \end{matrix};1\right]
$$

定理 1.14.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,1-n-d\end{matrix};1\right]=\frac{(2d)_n}{(d)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-n-b-c,d,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,\frac{1}{2}+d\end{matrix};1\right] $$

系 1.6. $\frac{1}{2}=b+c+d+n$ であるとき、

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,1-n-d\end{matrix};1\right]=\frac{(2b,2c,b+c)_n}{(b,c,2b+2c)_n} $$

定理 1.15.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,2-n-d\end{matrix};1\right]=\frac{(2d-1)_n}{(d-1)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-n-b-c,d-1,-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\1-n-b,1-n-c,d-\frac{1}{2}\end{matrix};1\right] $$

系 1.7. $\frac{3}{2}=b+c+d+n$ であるとき、

$$ \begin{aligned}{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,b,c,d\\1-n-b,1-n-c,2-n-d\end{matrix};1\right]&=\frac{\left(2b,2c,b+c-\frac{1}{2},b+c\right)_n}{\left(b,c,\frac{1}{2}+b+c,2b+2c-1\right)_n}\\&=\frac{(2c,2d-1,c+d-1)_n}{(c,d-1,2c+2d-2)_n}\end{aligned} $$

定理 1.16.

$$ \begin{aligned}&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,-n\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,w\end{matrix};1\right]\\&=\frac{(w-a-n-1)(w-a)_{n-1}}{(w)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},1+a-w,-n\\1+a-b,1+a-c,1+\frac{a-w-n}{2},1+\frac{1+a-w-n}{2}\end{matrix};1\right]\end{aligned} $$

定理 1.17. $\lambda=1+2a-b-c-d$ としたとき、

$$ \begin{aligned}&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d,-n\\1+a-b,1+a-c,1+a-d,2a-2\lambda-n\end{matrix};1\right]=\frac{(1+\lambda-a,1+2\lambda-a)_n}{(1+\lambda,1+2\lambda-2a)_n}\\&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}\lambda,1+\frac{\lambda}{2},\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,1+2\lambda-a+n,-n\\\frac{\lambda}{2},\lambda+\frac{1-a}{2},1+\lambda-\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,a-\lambda-n,1+\lambda+n\end{matrix};1\right]\end{aligned} $$

定理 1.18. $\lambda=1+2a-b-c-d$ としたとき、

$$ \begin{aligned}&{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d,-n\\1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+2a-2\lambda-n\end{matrix};1\right]=\frac{(\lambda-a)_n(1+2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a)}{(1+\lambda,2\lambda-2a)_n}\\&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}\lambda,1+\frac{\lambda}{2},\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,2\lambda-a+n,-n\\\frac{\lambda}{2},\lambda+\frac{1-a}{2},1+\lambda-\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-\lambda-n,1+\lambda+n\end{matrix};1\right]\end{aligned} $$

定理 1.19. $\lambda=1+2a-b-c-d$ としたとき、

$$ \begin{aligned}&{}_6F_5\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,-n\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+2a-2\lambda-n\end{matrix};1\right]=\frac{(\lambda-a,2\lambda-a)_n}{(1+\lambda,2\lambda-2a)_n}\\&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}\lambda,1+\frac{\lambda}{2},\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,2\lambda-a+n,-n\\\frac{\lambda}{2},\lambda-\frac{a}{2},\lambda+\frac{1-a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-\lambda-n,1+\lambda+n\end{matrix};1\right]\end{aligned} $$

定理 1.20. $\lambda=1+2a-b-c-d$ としたとき、

$$ \begin{aligned}&{}_6F_5\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,-n\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,2+2a-2\lambda-n\end{matrix};1\right]\\&=\frac{(\lambda-a-1)_n(2\lambda-a)_{n-1}(2\lambda+2n-a-1)}{(1+\lambda,2\lambda-2a-1)_n}\\&\times{}_9F_8\left[\begin{matrix}\lambda,1+\frac{\lambda}{2},\frac{1+a}{2},1+\frac{a}{2},b+\lambda-a,c+\lambda-a,d+\lambda-a,2\lambda-a+n-1,-n\\\frac{\lambda}{2},\lambda-\frac{a}{2},\lambda+\frac{1-a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,2+a-\lambda-n,1+\lambda+n\end{matrix};1\right]\end{aligned} $$

定理 1.21.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix}a,b,c,-n\\ \kappa-b,\kappa-c,\kappa+n\end{matrix};1\right]=\frac{(\kappa,\kappa-b-c)_n}{(\kappa-b,\kappa-c)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}\frac{\kappa-a}{2},\frac{1+\kappa-a}{2},b,c,-n\\ \kappa-a,\frac{\kappa}{2},\frac{1+\kappa}{2},1-n+b+c-\kappa\end{matrix};1\right] $$

定理 1.22.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\ \kappa-b,\kappa-c\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(\kappa-b)\Gamma(\kappa-c)}{\Gamma(\kappa)\Gamma(\kappa-b-c)}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\kappa-a}{2},\frac{1+\kappa-a}{2},b,c\\ \kappa-a,\frac{\kappa}{2},\frac{1+\kappa}{2}\end{matrix};1\right] $$

定理 1.23.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\Gamma(b+c)\Gamma\left(\frac{c-b}{2}\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}b,\frac{b+c-a}{2},\frac{1+b+c-a}{2}\\ b+c-a,\frac{1+b+c}{2}\end{matrix};1\right] $$

定理 1.24.

$$ \begin{aligned} &{}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{\kappa}{2},b,c,-n\\ \frac{\kappa}{2},1+\kappa-b,1+\kappa-c,1+\kappa+n\end{matrix};1\right]\\ &=\frac{(1+\kappa,1+\kappa-b-c)_n}{(1+\kappa-b,1+\kappa-c)_n}{}_5F_4\left[\begin{matrix}\frac{\kappa-a}{2},\frac{1+\kappa-a}{2},b,c,-n\\ 1+\kappa-a,\frac{\kappa}{2},\frac{1+\kappa}{2},b+c-\kappa-n\end{matrix};1\right] \end{aligned} $$

定理 1.25.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix}a,1+\frac{\kappa}{2},b,c\\ \frac{\kappa}{2},1+\kappa-b,1+\kappa-c\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(1+\kappa-b)\Gamma(1+\kappa-c)}{\Gamma(1+\kappa)\Gamma(1+\kappa-b-c)}{}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\kappa-a}{2},\frac{1+\kappa-a}{2},b,c\\ 1+\kappa-a,\frac{\kappa}{2},\frac{1+\kappa}{2}\end{matrix};1\right] $$

1.4 二次の変換公式

補題 1.2.

$$ (1-z)^{-d}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};\frac{x(-z)^p}{(1-z)^q}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(d)_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,b)_k(d+n)_{(q-p)k}(-n)_{pk}}{(c)_k(d)_{qk}k!}x^k $$

定理 1.26.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ 2b\end{matrix};2z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\ \frac{1}{2}+b\end{matrix};\frac{z^2}{(1-z)^2}\right] $$

定理 1.27.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ 1+a-b\end{matrix};z\right]=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\\ 1+a-b\end{matrix};-\frac{4z}{(1-z)^2}\right] $$

定理 1.28.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}2a,2b\\ \frac{1}{2}+a+b\end{matrix};z\right]={}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ \frac{1}{2}+a+b\end{matrix};4z(1-z)\right],\qquad z\leq\frac{1}{2} $$

定理 1.29.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ 1+a-b\end{matrix};z\right]=(1+z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\ 1+a-b\end{matrix};\frac{4z}{(1+z)^2}\right] $$

これは、$z\mapsto\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}$ として、以下のように書ける。

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\ 1+a-b\end{matrix};z\right]=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^a{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ 1+a-b\end{matrix};\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right] $$

定理 1.30.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ 2b\end{matrix};\frac{4z}{(1+z)^2}\right]=(1+z)^{2a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,\frac{1}{2}+a-b\\ \frac{1}{2}+b\end{matrix};z^2\right] $$

これは、$z \mapsto \frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}$ として、以下のように書ける。

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ 2b \end{matrix};z\right] = \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, \frac{1}{2}+a-b \\ \frac{1}{2}+b \end{matrix}; \left(\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right)^2\right] $$

系 1.8.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix};z^2\right] = \frac{2}{1+\sqrt{1-z^2}} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}; \left(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}\right)^2\right] $$

定理 1.31.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c \\ 1+a-b,1+a-c \end{matrix};z\right] = (1-z)^{-a} {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2} \\ 1+a-b,1+a-c \end{matrix}; -\frac{4z}{(1-z)^2}\right] $$

定理 1.32.

$$ \begin{aligned} {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,b,c,1+d \\ 1+a-b,1+a-c,d \end{matrix};z\right] &= (1-z)^{-a} {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}, 1+d \\ 1+a-b,1+a-c,d \end{matrix}; -\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \\ &\quad + \frac{az}{d(1-z)^{1+a}} {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2} \\ 1+a-b,1+a-c \end{matrix}; -\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \end{aligned} $$

定理 1.33.

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c \end{matrix};z\right] = \frac{1+z}{(1-z)^{1+a}} {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1+a-b-c, \frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2} \\ 1+a-b,1+a-c \end{matrix}; -\frac{4z}{(1-z)^2}\right] $$

1.5 Clausen の公式

定理 1.34.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ \frac{1}{2}+a+b \end{matrix};z\right]^2 = {}_3F_2\left[\begin{matrix} 2a,2b,a+b \\ \frac{1}{2}+a+b,2a+2b \end{matrix};z\right] $$

系 1.9.

$$ \arcsin^2 x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}} $$

定理 1.35.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ \frac{1+a+b}{2} \end{matrix};z\right]^2 = {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,\frac{a+b}{2} \\ a+b,\frac{1+a+b}{2} \end{matrix};4z(1-z)\right], \qquad z \le \frac{1}{2} $$

系 1.10.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix};z\right]^2 = {}_3F_2\left[\begin{matrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 1,1 \end{matrix};4z(1-z)\right], \qquad z \le \frac{1}{2} $$

定理 1.36.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ \frac{1}{2}+a+b \end{matrix};z\right] {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ a+b-\frac{1}{2} \end{matrix};z\right] = {}_3F_2\left[\begin{matrix} 2a,2b,a+b \\ \frac{1}{2}+a+b,2a+2b-1 \end{matrix};z\right] $$

定理 1.37.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ a+b-\frac{1}{2} \end{matrix};z\right] {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b-1 \\ a+b-\frac{1}{2} \end{matrix};z\right] = {}_3F_2\left[\begin{matrix} 2a,2b-1,a+b-1 \\ a+b-\frac{1}{2},2a+2b-2 \end{matrix};z\right] $$

第 2 章

Bilateral 超幾何級数

2.1 Bilateral 超幾何級数の定義

Bilateral 超幾何級数を以下のように定義する。

定義 2.1.

$$ {}_rH_s\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};z\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1,\dots,a_r)_n}{(b_1,\dots,b_s)_n}z^n $$

定理 2.1.

$$ {}_1H_1\left[\begin{matrix}a\\ c\end{matrix};1\right]=0 $$

2.2 Dougall の ${}_2H_2$ 和公式

定理 2.2. Dougall の ${}_2H_2$ 和公式

$$ {}_2H_2\left[\begin{matrix}a,b\\ c,d\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)} $$

系 2.1.

$$ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a,n+b)_{m+1}}=\binom{2m}{m}\frac{1}{(1+a-b,1+b-a)_m}\frac{\pi}{\sin\pi a\sin\pi b}\frac{\sin\pi(b-a)}{b-a} $$

系 2.2.

$$ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\frac{\pi}{\sin\pi a\sin\pi b}\frac{\sin\pi(b-a)}{b-a} $$

系 2.3.

$$ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)_{m+1}^2}=\frac{(2m)!}{m!^4}\frac{\pi^2}{\sin^2\pi a} $$

系 2.4.

$$ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi a} $$

定理 2.3. Bailey の $_3H_3$ 和公式

$$\lambda = \frac{(f-a)(f-b)-(1+f-c)(1+f-d)}{f}$$

としたとき、

$$_3H_3\left[\begin{matrix}a,b,1+f\\c,d,f\end{matrix};1\right] = \lambda\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c+d-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}$$

2.3 $_5H_5$ の和公式

定理 2.4.

$$\begin{aligned}&{}_5H_5\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d,e\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e\end{matrix};1\right]\\&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1-e,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+2a-b-c-d-e\\1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-b-e,1+a-c-d,1+a-c-e,1+a-d-e\end{matrix}\right]\end{aligned}$$

定理 2.5.

$$\begin{aligned}&{}_4H_4\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};-1\right]\\&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1+a-b,1+a-c,1+a-d\\1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-c-d\end{matrix}\right]\end{aligned}$$

定理 2.6.

$$\begin{aligned}&{}_4H_4\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]\\&=\frac{2\sin\frac{\pi a}{2}}{a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1+a-b,1+a-c,1+a-d,\frac{1+3a}{2}-b-c-d\\1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-c-d,\frac{1+a}{2}-b,\frac{1+a}{2}-c,\frac{1+a}{2}-d\end{matrix}\right]\end{aligned}$$

定理 2.7.

$$\begin{aligned}&{}_3H_3\left[\begin{matrix}b,c,d\\1+a-b,1+a-c,1+a-d\end{matrix};1\right]\\&=\cos\frac{\pi a}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1-d,1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+\frac{3a}{2}-b-c-d\\1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-c-d,1+\frac{a}{2}-b,1+\frac{a}{2}-c,1+\frac{a}{2}-d\end{matrix}\right]\end{aligned}$$

系 2.5.

$$_3H_3\left[\begin{matrix}a,b,c\\1-a,1-b,1-c\end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)\Gamma(1-a-b-c)}{\Gamma(1-a-b)\Gamma(1-b-c)\Gamma(1-c-a)}$$

これは以下のようにも書ける。

$$2\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}1,a,b,c\\1-a,1-b,1-c\end{matrix};1\right] = 1+\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)\Gamma(1-a-b-c)}{\Gamma(1-a-b)\Gamma(1-b-c)\Gamma(1-c-a)}$$

系 2.6.

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{a}{k}\binom{b}{k}\binom{c}{k}}{\binom{a+k}{k}\binom{b+k}{k}\binom{c+k}{k}} = 1+\frac{a!b!c!(a+b+c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}, \qquad a,b,c\in\mathbb{N}_0$$

2.4 変換公式

定理 2.8.

$$
{}_4H_4\left[\begin{matrix}a,b,c,d\\1-a,1-b,1-c,1-d\end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1-d)}{\Gamma(1-c-d)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1-a-b,c,d\\1-a,1-b\end{matrix};1\right]
$$

定理 2.9.

$$
\begin{aligned}
{}_3H_3\left[\begin{matrix}a,b,c\\1-a,1-b,1-c\end{matrix};-1\right]&=\frac{\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b-c)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}-a,b,c\\\frac{1}{2},1-a\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-a)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},a,1-b-c\\1-b,1-c\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

定理 2.10. $\lambda=1-c-d-e$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_5H_5\left[\begin{matrix}a,b,c,d,e\\1-a,1-b,1-c,1-d,1-e\end{matrix};1\right]\\
&=\Gamma\left[\begin{matrix}1-c,1-d,1-e,\lambda\\c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix}1-a-b,c,d,e\\1-a,1-b,1-\lambda\end{matrix};1\right]\\
&+\Gamma\left[\begin{matrix}1-a,1-b,1-c,1-d,1-e,-\lambda,1+\lambda-a-b\\1-a-b,c,d,e,1+\lambda-a,1+\lambda-b\end{matrix}\right]{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+\lambda-a-b,c+\lambda,d+\lambda,e+\lambda\\1+\lambda,1+\lambda-a,1+\lambda-b\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

定理 2.11. $\lambda=1+a-d-e-f$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&{}_6H_6\left[\begin{matrix}1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f\\\frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\end{matrix};-1\right]\\
&=\frac{\sin\pi a}{\pi a}\Gamma\left[\begin{matrix}1-b,1-c,1+a-d,1+a-e,1+a-f\\1+a-b-c\end{matrix}\right]\\
&\times\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(d+\lambda)\Gamma(e+\lambda)\Gamma(f+\lambda)}{}_3H_3\left[\begin{matrix}d,e,f\\1+a-b,1+a-c,1-\lambda\end{matrix};1\right]\right.\\
&\left.-\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\Gamma\left[\begin{matrix}1+a-b,1+a-c\\d,e,f,1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}d+\lambda,e+\lambda,f+\lambda\\1+a+\lambda-b,1+a+\lambda-c\end{matrix};1\right]\right)
\end{aligned}
$$

第 3 章

多変数超幾何級数

3.1 Appell 超幾何級数の定義

定義 3.1.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b_1)_n(b_2)_m}{(c)_{n+m}n!m!}x^ny^m \tag{3.1}$$

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b_1)_n(b_2)_m}{(c_1)_n(c_2)_mn!m!}x^ny^m \tag{3.2}$$

$$F_3\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a_1,b_1)_n(b_1,b_2)_m}{(c)_{n+m}n!m!}x^ny^m \tag{3.3}$$

$$F_4\left[\begin{matrix}a,b\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a,b)_{n+m}}{(c_1)_n(c_2)_mn!m!}x^ny^m \tag{3.4}$$

3.2 F_1

まず、以下のように展開できる。

定理 3.1.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c)_nn!}x^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}a+n,b_2\\c+n\end{matrix};y\right]$$

定理 3.2. F_1 の積分表示

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b_1}(1-yt)^{-b_2}\,dt$$

定理 3.3.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,x\right]={}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_1+b_2\\c\end{matrix};x\right]$$

系 3.1.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};1,1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1-b_2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1-b_2)}$$

定理 3.4.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};1,x\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1)}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_2\\c-b_1\end{matrix};x\right]$$

定理 3.5.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=(1-x)^{-b_1}(1-y)^{-b_2}F_1\left[\begin{matrix}c-a;b_1,b_2\\c\end{matrix};\frac{x}{x-1},\frac{y}{y-1}\right]$$

定理 3.6.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=(1-x)^{c-a-b_1}(1-y)^{-b_2}F_1\left[\begin{matrix}c-a;c-b_1-b_2,b_2\\c\end{matrix};x,\frac{x-y}{1-y}\right] \tag{3.5}$$

$$=(1-x)^{-b_1}(1-y)^{c-a-b_2}F_1\left[\begin{matrix}c-a;b_1,c-b_1-b_2\\c\end{matrix};\frac{y-x}{1-x},y\right] \tag{3.6}$$

定理 3.7.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=(1-x)^{-a}F_1\left[\begin{matrix}a;c-b_1-b_2,b_2\\c\end{matrix};\frac{x}{x-1},\frac{y-x}{1-x}\right] \tag{3.7}$$

$$=(1-y)^{-a}F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,c-b_1-b_2\\c\end{matrix};\frac{x-y}{1-y},\frac{y}{y-1}\right] \tag{3.8}$$

定理 3.8.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b,c-b\\c\end{matrix};x,y\right]=(1-y)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{x-y}{1-y}\right]$$

系 3.2.

$$F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};x,y\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix};\frac{y-x}{1-x}\right]$$

定理 3.9.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c)_n n!}x^n{}_2F_1\left[\begin{matrix}b_2,-n\\1-n-b_1\end{matrix};\frac{y}{x}\right]$$

定理 3.10.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b,b\\c\end{matrix};x,-x\right]={}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b\\\frac{c}{2},\frac{1+c}{2}\end{matrix};x^2\right]$$

定理 3.11.

$$F_1\left[\begin{matrix}a;b,b\\1+a-b\end{matrix};e^{\frac{2\pi i}{3}},e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right]=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{3}-b\right)}$$

これは実部をとって、以下のようにも書ける。

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(b)_n(b)_m}{(1+a-b)_{n+m}n!m!}\cos\frac{2\pi(n-m)}{3}=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{3}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{3}-b\right)}$$

系 3.3.

$$\sum_{i,j=0}^{m}\frac{\binom{3n}{i+j}\binom{m}{i}\binom{m}{j}}{\binom{m-3n+i+j}{i+j}}\cos\frac{2\pi(i-j)}{3}=\frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{3n}}$$

系 3.4.

$$\sum_{i,j=0}^{3n}\binom{3n}{i+j}\binom{3n}{i}\binom{3n}{j}\cos\frac{2\pi(i-j)}{3}=\binom{3n}{n}$$

定理 3.12.

$$F_1\left[\begin{matrix}1-a;a,a\\c\end{matrix};\frac{e^{\pi/6}}{\sqrt{3}},\frac{e^{-\pi/6}}{\sqrt{3}}\right]=3^a\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{2+a+c}{3}\right)}{\Gamma(a+c)\Gamma\left(\frac{2-2a+c}{3}\right)}$$

系 3.5.

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{(2n+2m-1)!!}{(2n+2m)!!}\frac{\cos\frac{\pi}{6}(n-m)}{3^{\frac{n+m}{2}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{3\pi}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

3.3 F_2

定理 3.13.

$$F_2\begin{bmatrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{bmatrix};x,y\Big] = \frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}(1-xt)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b_2\\c_2\end{matrix};\frac{y}{1-xt}\right]dt$$

定理 3.14. F_2 の積分表示

$$\begin{aligned}F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right] &= \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1)\Gamma(c_2-b_2)}\\ \times\int_0^1\int_0^1 & t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}s^{b_2-1}(1-s)^{c_2-b_2-1}(1-xt-ys)^{-a}\,dtds\end{aligned}$$

定理 3.15.

$$\begin{aligned}F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right] &= (1-x)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;c_1-b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{x}{x-1},\frac{y}{1-x}\right] &(3.9)\\ &= (1-y)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,c_2-b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{x}{1-y},\frac{y}{y-1}\right] &(3.10)\\ &= (1-x-y)^{-a}F_2\left[\begin{matrix}a;c_1-b_1,c_2-b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\frac{x}{x+y-1},\frac{y}{x+y-1}\right] &(3.11)\end{aligned}$$

系 3.6.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b,-\\c,-\end{matrix};x,y\right] = (1-y)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{x}{1-y}\right]$$

定理 3.16.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};x,y\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b_1)_n}{(c_1)_n n!}x^n\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}b_2,1-n-c_1,-n\\c_2,1-n-b_1\end{matrix};-\frac{y}{x}\right]$$

定理 3.17.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b,b\\c,c\end{matrix};x,-x\right] = {}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2},b,c-b\\\frac{c}{2},\frac{1+c}{2},c\end{matrix};x^2\right]$$

系 3.7.

$$F_2\left[\begin{matrix}a;b,b\\a,a\end{matrix};x,-x\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix}b,a-b\\a\end{matrix};x^2\right]$$

3.4 F_3

定理 3.18.

$$F_3\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c-a_1)}\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{c-a_1-1}(1-xt)^{-b_1}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a_2,b_2\\c-a_1\end{matrix};(1-t)y\right]dt$$

定理 3.19. F_3 の積分表示

$$\begin{aligned}F_3\left[\begin{matrix}a_1,a_2;b_1,b_2\\c\end{matrix};x,y\right] &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(c-a_1-a_2)}\\ \times\int_{0\le t+s\le 1} & t^{a_1-1}s^{a_2-1}(1-xt)^{-b_1}(1-ys)^{-b_2}(1-t-s)^{c-a_1-a_2-1}\,dtds\end{aligned}$$

定理 3.20.

$$F_3\left[\begin{matrix}a, c-a; b_1, b_2\\ c\end{matrix}; x, y\right] = (1-y)^{-b_2} F_1\left[\begin{matrix}a; b_1, b_2\\ c\end{matrix}; x, \frac{y}{y-1}\right]$$

定理 3.21.

$$F_3\left[\begin{matrix}a, c-a; b, c-b\\ c\end{matrix}; x, y\right] = (1-y)^{a+b-c}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}; x+y-xy\right]$$

系 3.8.

$$F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}; x, y\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}; x+y-xy\right]$$

3.5 F_4

定理 3.22.

$$F_4\left[\begin{matrix}a, b\\ c_1, c_2\end{matrix}; x, y\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,b)_n}{(c_1)_n n!} x^n {}_2F_1\left[\begin{matrix}1-n-c_1, -n\\ c_2\end{matrix}; \frac{y}{x}\right]$$

定理 3.23.

$$F_4\left[\begin{matrix}a, b\\ c_1, c_2\end{matrix}; x, x\right] = {}_4F_3\left[\begin{matrix}a, b, \frac{c_1+c_2-1}{2}, \frac{c_1+c_2}{2}\\ c_1, c_2, c_1+c_2-1\end{matrix}; 4x\right]$$

系 3.9.

$$F_4\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ 1, 1\end{matrix}; x, x\right] = {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ 1, 1\end{matrix}; 4x\right]$$

3.6 Lauricella 超幾何級数

定義 3.2.

$$F_A^{(n)}\left[\begin{matrix}a; b_1, \ldots, b_n\\ c_1, \ldots, c_n\end{matrix}; z_1, \ldots, z_n\right] = \sum_{i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{i_1+\cdots,i_n}(b_1)_{i_1}\cdots(b_n)_{i_n}}{(c_1)_{i_1}\cdots(c_n)_{i_n} i_1!\cdots i_n!} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \tag{3.12}$$

$$F_B^{(n)}\left[\begin{matrix}a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n\\ c\end{matrix}; z_1, \ldots, z_n\right] = \sum_{i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{i_1}\cdots(a_n)_{i_n}(b_1)_{i_1}\cdots(b_n)_{i_n}}{(c)_{i_1+\cdots+i_n} i_1!\cdots i_n!} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \tag{3.13}$$

$$F_C^{(n)}\left[\begin{matrix}a; b\\ c_1, \ldots, c_n\end{matrix}; z_1, \ldots, z_n\right] = \sum_{i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{i_1+\cdots,i_n}(b)_{i_1+\cdots+i_n}}{(c_1)_{i_1}\cdots(c_n)_{i_n} i_1!\cdots i_n!} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \tag{3.14}$$

$$F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a; b_1, \ldots, b_n\\ c\end{matrix}; z_1, \ldots, z_n\right] = \sum_{i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{i_1+\cdots,i_n}(b_1)_{i_1}\cdots(b_n)_{i_n}}{(c)_{i_1+\cdots+i_n} i_1!\cdots i_n!} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \tag{3.15}$$

Appell の級数との対応は以下の通りである。

$$F_A^{(2)}\left[\begin{matrix}a; b_1, b_2\\ c_1, c_2\end{matrix}; x, y\right] = F_2\left[\begin{matrix}a; b_1, b_2\\ c_1, c_2\end{matrix}; x, y\right] \tag{3.16}$$

$$F_B^{(2)}\left[\begin{matrix}a_1, a_2; b_1, b_2\\ c\end{matrix}; x, y\right] = F_3\left[\begin{matrix}a_1, a_2; b_1, b_2\\ c\end{matrix}; x, y\right] \tag{3.17}$$

$$F_C^{(2)}\left[\begin{matrix}a; b\\ c_1, c_2\end{matrix}; x, y\right] = F_4\left[\begin{matrix}a; b\\ c_1, c_2\end{matrix}; x, y\right] \tag{3.18}$$

$$F_D^{(2)}\left[\begin{matrix}a; b_1, b_2\\ c\end{matrix}; x, y\right] = F_1\left[\begin{matrix}a; b_1, b_2\\ c\end{matrix}; x, y\right] \tag{3.19}$$

定理 3.24. F_D の積分表示

$$F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\c\end{matrix};z_1,\dots,z_n\right]=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-z_1x)^{-b_1}\cdots(1-z_nx)^{-b_n}\,dx$$

定理 3.25.

$$F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\c\end{matrix};z_1,\dots,z_{n-1},1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_n)}F_D^{(n-1)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_{n-1}\\c-b_n\end{matrix};z_1,\dots,z_{n-1}\right]$$

系 3.10.

$$F_D^{(n)}\left[\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\c\end{matrix};1,\dots,1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1-\cdots-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1-\cdots-b_n)}$$

参考文献

[1] W.N. Bailey - Generalized hypergeometric series, Cambridge University Press, 1935

[2] Bruce C. Berndt - Ramanujan's Notebooks Part II Springer-Verlag New York 1989

[3] Slater L.J. - Generalized hypergeometric functions-Cambridge 1966

[4] George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy - Special functions-Cambridge University Press 1999