超幾何級数 III

@nkswtr

はじめに

この PDF は、q 超幾何級数の基本的な定理と、そこから得られるいくつかの系について解説したものである。古典的な超幾何級数をある程度知っていたほうがいいと思われるが、知らなくても読めるようにはなっていると思う。q 超幾何級数の場合は q 類似になることによって、得られる式の数が古典より多くなっていると思う。

目次

第 1 章　q 類似の導入　3

1.1　基本的な q 類似　3

1.2　q ガンマ関数　7

1.3　q 微分　8

1.4　q 積分　11

1.5　q 超幾何級数の定義　12

第 2 章　q 超幾何級数の変換公式　14

2.1　Heine の変換公式　14

2.2　Jackson の ${}_8\phi_7$ 和公式　29

2.3　Watson の ${}_8\phi_7$ 変換公式　35

2.4　q-Karlsson-Minton の和公式　38

第 3 章　Bilateral q 超幾何級数　45

3.1　Jacobi の三重積　45

3.2　Ramanujan の和公式　49

参考文献　54

第 1 章

q 類似の導入

1.1　基本的な q 類似

定義 1.1. q 数の定義

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}$$

ここで、

$$\lim_{q\to 1}[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q} = a$$

である。

ポッホハマー記号の q 類似を以下で定義する。

定義 1.2. q ポッホハマー記号の定義

$$(a;q)_0 = 1, \quad (a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), \quad (a;q)_{-n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1-aq^{-k})}$$

また、$n\to\infty$ として、

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$$

と定義する。q ポッホハマー記号には以下のような計算法則がある。

定理 1.1.

$$(a;q)_n = (-a)^n q^{\binom{n}{2}}(q^{1-n}/a;q)_n \tag{1.1}$$

$$(a;q)_{-n} = \frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q/a;q)_n} \tag{1.2}$$

$$(a;q)_{n+k} = (a;q)_n(aq^n;q)_k \tag{1.3}$$

$$(a;q)_{n-k} = \frac{(a;q)_n}{(q^{1-n}/a;q)_k}(-q/a)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \tag{1.4}$$

$$(q^{-n};q)_k = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \tag{1.5}$$

$$(a,-a;q)_n = (a^2;q^2)_n \tag{1.6}$$

$$(a;q)_{2n} = (a,aq;q^2)_n \tag{1.7}$$

証明. (1.1) 式は、

$$
\begin{aligned}
(a;q)_n &= \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(-a)q^k(1-q^{-k}/a) \\
&= (-a)^n q^{\binom{n}{2}} \prod_{k=0}^{n-1}(1-q^{-k}/a) \\
&= (-a)^n q^{\binom{n}{2}} \prod_{k=0}^{n-1}(1-q^{1-n+k}/a) \\
&= (-a)^n q^{\binom{n}{2}} (q^{1-n}/a;q)_n
\end{aligned}
$$

(1.2) 式は、

$$
\begin{aligned}
(a;q)_{-n} &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1-aq^{-k})} \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(-a)q^{-k}(1-q^k/a)} \\
&= \frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^k/a)} \\
&= \frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{\prod_{k=0}^{n-1}(1-q^{1+k}/a)} \\
&= \frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q/a;q)_n}
\end{aligned}
$$

(1.3) 式は、

$$
\begin{aligned}
(a;q)_{n+k} &= \prod_{j=0}^{n+k-1}(1-aq^j) \\
&= \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j) \prod_{j=n}^{n+k-1}(1-aq^j) \\
&= (a;q)_n \prod_{j=0}^{k-1}(1-aq^{n+j}) \\
&= (a;q)_n (aq^n;q)_k
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
(a;q)_{n-k} &= \prod_{j=0}^{n-k-1}(1-aq^j) \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j)}{\prod_{j=1}^{k}(1-aq^{n-k})} \\
&= (a;q)_n(aq^n;q)_{-k}
\end{aligned}
$$

であるから、(1.4) 式は、(1.2) 式を用いて、

$$
\begin{aligned}
(a;q)_{n-k} &= (a;q)_n(aq^n;q)_{-k} \\
&= (a;q)_n\frac{(-q^{1-n}/a)^k q^{\binom{n}{2}}}{(q^{1-n}/a;q)_k} \\
&= \frac{(a;q)_n}{(q^{1-n}/a;q)_k}(-q/a)^k q^{\binom{k}{2}-nk}
\end{aligned}
$$

(1.5) 式は、(1.4) 式より、

$$
\begin{aligned}
(q;q)_{n-k} &= \frac{(q;q)_n}{(q^{-n};q)_k}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \\
(q^{-n};q)_k &= \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk}
\end{aligned}
$$

(1.6) 式は、

$$
\begin{aligned}
(a,-a;q)_n &= \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)(1+aq^k) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(1-a^2q^{2k}) \\
&= (a^2;q^2)_n
\end{aligned}
$$

(1.7) 式は、

$$
\begin{aligned}
(a;q)_{2n} &= \prod_{k=0}^{2n-1}(1-aq^k) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^{2k})\prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^{2k+1}) \\
&= (a,aq;q)_n
\end{aligned}
$$

□

　最後の式は、

$$
(a;q)_{mn} = (a,aq,\ldots,aq^{m-1};q^m)_n
$$

と一般化でき、特に $n \to \infty$ として、

$$
(a;q)_\infty = (a,aq,\ldots,aq^{m-1};q^m)_\infty
$$

系 1.1.

$$(a;q)_{2n} = (\sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}; q)_n \tag{1.8}$$

$$\frac{(\sqrt{a}q, -\sqrt{a}q; q)_n}{(\sqrt{a}, -\sqrt{a}; q)_n} = \frac{1-aq^{2n}}{1-a} \tag{1.9}$$

証明. (1.8) 式は、

$$\begin{aligned}(a;q)_{2n} &= (a, aq; q^2)_n \\ &= (\sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q; q)_n\end{aligned}$$

(1.9) 式は、

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{a}q, -\sqrt{a}q; q)_n}{(\sqrt{a}, -\sqrt{a}; q)_n} &= \frac{(aq^2; q^2)_n}{(a; q^2)_n} \\ &= \frac{1-aq^{2n}}{1-a}\end{aligned}$$

□

これらの式はよく使うので、覚えておいたほうがよいが、覚えていなくても書き留めておいて、いつでも使えるようにしておくことが望ましい。

q ポッホハマー記号は以下のように極限をとると通常のポッホハマー記号になる。

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1}\frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} &= \lim_{q\to 1}\frac{1-q^a}{1-q}\frac{1-q^{a+1}}{1-q}\cdots\frac{1-q^{a+n-1}}{1-q} \\ &= a(a+1)\cdots(a+n-1) \\ &= (a)_n\end{aligned}$$

次の式は慣れない人にとっては非自明な等式に見えるかもしれない。

定理 1.2. Euler の恒等式

$$(-q;q)_\infty (q;q^2)_\infty = 1$$

証明.

$$\begin{aligned}(-q;q)_\infty (q;q^2)_\infty &= (-q;q)_\infty \frac{(q,q^2;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} \\ &= (-q;q)_\infty \frac{(q;q)_n}{(q^2;q^2)_n} \\ &= (-q;q)_\infty \frac{1}{(-q;q)_\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

□

q 階乗も次のように定義しておく

定義 1.3. q 階乗の定義

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n}[k]_q$$

q 階乗よりも、q 二項係数の方がよく使うだろう。

定義 1.4. q 二項係数の定義

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}_q &= \lim_{n\to\infty}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \\ &= \frac{(q;q)_\infty}{(q;q)_k(q;q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(q;q)_k}\end{aligned}$$

である。

1.2 q ガンマ関数

q ガンマ関数は少し見ただけではガンマ関数には見えないが、$q \to 1$ の極限でガンマ関数になっているから面白いと思う。

定義 1.5. q ガンマ関数の定義

$$\Gamma_q(z) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}(1-q)^{1-z}$$

定理 1.3.

$$\lim_{q\to 1}\Gamma_q(z) = \Gamma(z)$$

証明.

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1}\Gamma_q(z) &= \lim_{q\to 1}\frac{(q;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}(1-q)^{1-z} \\ &= \lim_{q\to 1}\frac{1-q}{1-q^z}\frac{(q;q)_\infty}{(q^{1+z};q)_\infty}(1-q)^{-z} \\ &= \frac{1}{z}\lim_{q\to 1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1-q^{n+z}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^z \\ &= \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+z}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{N}\frac{n}{n+z}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{(N+1)^z N!}{\prod_{n=0}^{N}(n+z)} \\ &= \Gamma(z)\end{aligned}$$

最後の等号は Euler の積表示による。 □

次はガンマ関数における、Gauss の乗法公式の q 類似である。

定理 1.4.

$$\Gamma_q(nz)\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma_{q^n}\left(\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^{nz-1}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma_{q^n}\left(z+\frac{k}{n}\right)$$

証明.

$$\begin{aligned}\Gamma_q(nz)\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma_{q^n}\left(\frac{k}{n}\right)&=\frac{(q;q)_\infty}{(q^{nz};q)_\infty}(1-q)^{1-nz}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(q^n;q^n)_\infty}{(q^k;q^n)_\infty}(1-q^n)^{1-k/n}\\&=\frac{(q;q)_\infty}{(q^{nz};q)_\infty}(1-q)^{1-nz}\frac{(q^n;q^n)_\infty^{n-1}}{(q;q)_\infty}(q^n;q^n)_\infty(1-q^n)^{n-1-\sum_{k=1}^{n-1}k/n}\\&=\frac{(q^n;q^n)_\infty^n}{(q^{nz};q)_\infty}(1-q)^{1-nz}(1-q^n)^{n-1-\sum_{k=0}^{n-1}k/n}\\&=(1-q)^{1-nz}(1-q^n)^{n-1-\sum_{k=0}^{n-1}k/n}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(q^n;q^n)_\infty}{(q^{nz+k};q^n)_\infty}\\&=(1-q)^{1-nz}(1-q^n)^{nz-1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(q^n;q^n)_\infty}{(q^{nz+k};q^n)_\infty}(1-q^n)^{1-z-k/n}\\&=\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^{nz-1}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma_{q^n}\left(z+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

□

q ガンマ関数がガンマ関数の q 類似になっていることから、関係式

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

を用いて、q ベータ関数を以下のように定義する。

定義 1.6. q ベータ関数の定義

$$B_q(x,y)=\frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)}$$

1.3 q 微分

定義 1.7. q 微分の定義

$$D_qf(z)=\frac{f(z)-f(zq)}{(1-q)z}$$

これは、$q\to1$ の極限で、

$$\begin{aligned}\lim_{q\to1}D_qf(z)&=\lim_{q\to1}\frac{f(zq)-f(z)}{(q-1)z}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(z(1+h))-f(z)}{hz}\\&=f'(z)\end{aligned}$$

であるから、通常の微分に一致する。
z^n の q 微分は q 数を用いて書くと、以下のようになる。

$$D_q z^n = \frac{z^n - z^n q^n}{(1-q)z} = [n]_q z^{n-1}$$

よって、z^n を m 回 q 微分すると、

$$\begin{aligned} D_q^m z^n &= [n]_q [n-1]_q \cdots [n-m+1]_q z^{n-m} \\ &= \frac{[n]_q!}{[n-m]_q!} z^{n-m} \end{aligned}$$

これを冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{[n]_q!} z^n$$

について適用すると、

$$\begin{aligned} D_q^m f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{[n-m]_q!} z^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+m}}{[n]_q!} z^n \end{aligned}$$

よって、Taylor 展開の q 類似

定理 1.5.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_q^n f(a)\big|_{a=0}}{[n]_q!} z^n$$

が成り立つ。

定理 1.6.

$$(z;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} (-z)^k$$

証明. 左辺を z について q 微分すると、

$$\begin{aligned} D_q (z;q)_n &= \frac{(z;q)_n - (zq;q)_n}{(1-q)z} \\ &= \frac{(1-z)(zq;q)_{n-1} - (1-q^n z)(zq;q)_{n-1}}{(1-q)z} \\ &= \frac{(q^n-1)z(z;q)_{n-1}}{(1-q)z} \\ &= -[n]_q (zq;q)_{n-1} \end{aligned}$$

よって、帰納的に

$$\begin{aligned} D_q^k (z;q)_n &= (-1)^k [n]_q \cdots [n-k+1]_q q^{1+2+\cdots+(k-1)} (zq^k;q)_{n-k} \\ &= (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!} (zq^k;q)_{n-k} \end{aligned}$$

これは、$k > n$ では 0 になる。ここで、

$$D_q^k (z;q)_n \Big|_{z=0} = (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}$$

であるから、定理 1.5 より、

$$\begin{aligned}(z;q)_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} (-z)^k\end{aligned}$$

□

定理 1.7.

$$(z;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}(-z)^n}{(q;q)_n}$$

証明. 定理 1.6 において、$n \to \infty$ とすると、

$$\begin{aligned}(z;q)_\infty &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} (-z)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}}(-z)^k}{(q;q)_k}\end{aligned}$$

ここで、$k \to n$ として、定理を得る。 □

定理 1.8.

$$\frac{1}{(z;q)_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}_q z^k$$

証明. 左辺を z について q 微分すると、

$$\begin{aligned}D_q \frac{1}{(z;q)_n} &= \frac{1}{(1-q)z} \frac{1}{(z;q)_n} - \frac{1}{(zq;q)_n} \\ &= \frac{1}{(1-q)z} \frac{1-q^n z}{(z;q)_{n+1}} - \frac{1-z}{(z;q)_{n+1}} \\ &= \frac{1}{(1-q)z} \frac{(1-q^n)z}{(z;q)_{n+1}} \\ &= \frac{[n]_q}{(z;q)_{n+1}}\end{aligned}$$

よって、帰納的に

$$\begin{aligned}D_q^k \frac{1}{(z;q)_n} &= \frac{[n]_q \cdots [n+k-1]_q}{(z;q)_{n+k}} \\ &= \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q!(z;q)_{n+k}}\end{aligned}$$

であるから、

$$D_q^k \frac{1}{(z;q)_n}\bigg|_{z=0} = \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q!}$$

定理 1.5 より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z;q)_n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k]_q!} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}_q z^k\end{aligned}$$

□

次は非常に美しい式だと思う。

定理 1.9.

$$\frac{1}{(z;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n}$$

証明. 定理 1.8 において、$n \to \infty$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z;q)_\infty} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}_q z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(q;q)_k}\end{aligned}$$

ここで、$k \to n$ として、定理を得る。 □

系 1.2.

$$\frac{1}{(q;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q;q)_n}$$

証明. 定理 1.9 において、$z \mapsto q$ とすればよい。 □

1.4 q 積分

以下は Jackson による q 積分の定義である。

定義 1.8. q 積分の定義

$$\int_0^a f(x)\, d_q x = (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n) q^n \tag{1.10}$$

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = \int_0^b f(x)\, d_q x - \int_0^a f(x)\, d_q x \tag{1.11}$$

$$\int_0^\infty f(x)\, d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n) q^n \tag{1.12}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f(q^n) + f(q^{-n})) q^n \tag{1.13}$$

ag

この最初の式を a について、q 微分すると、

$$\begin{aligned}D_q \int_0^a f(x)\,d_qx &= D_q(1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n \\ &= \frac{1}{(1-q)a}\left((1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n - (1-q)aq\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^{n+1})q^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^{n+1})q^{n+1} \\ &= f(a)\end{aligned}$$

よって、q 積分が存在すれば、それは q 微分の逆演算になっている。よって、q 積分において $q \to 1$ が存在すれば、それは通常の積分に一致する。広義積分の方の q 類似はここでは用いないので、確かめることはしないが、興味があったら確かめてみても面白いかもしれない。

1.5 q 超幾何級数の定義

さて、ようやく本題の q 超幾何級数を定義することにする。最初は複雑に見えるかもしれないが、慣れれば古典的な超幾何級数と同様に扱えるだろう。

定義 1.9.

$${}_r\phi_s\begin{bmatrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{bmatrix};q;z\end{bmatrix}$$

これは、以下のように極限を取ることで、古典的な超幾何級数になる。これを q 超幾何級数の古典極限という。

$$\lim_{q\to 1} {}_r\phi_s\left[\begin{matrix}q^{a_1},\ldots,q^{a_r}\\ q^{b_1},\ldots,q^{b_s}\end{matrix};q;(1-q)^{1+s-r}z\right] = {}_rF_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};z\right]$$

古典極限は存在する場合と存在しない場合があり、q 超幾何級数において重要な公式である、Heine の変換公式

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};z\right] = \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,z\\ az\end{matrix};b\right]$$

は古典極限が存在しない。また、底が q であるとき、省略して以下のように書く

$${}_r\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};z\right] = {}_r\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};q;z\right]$$

古典的な超幾何級数との大きな違いは、

$${}_0\phi_1\left[\begin{matrix}-\\ z\end{matrix};z\right] = \frac{1}{(z;q)_\infty}$$

のように、${}_{r+1}\phi_r$ 以外にも、和公式が存在するということである。この式の証明は後で行う。さて、古典的な超幾何級数と比べて、

$$\left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{1+s-r}$$

というものがついているが、これはおそらく

$$\lim_{a_{r+1}\to\infty} {}_{r+1}\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{r+1}\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};q;\frac{z}{a_{r+1}}\right] = {}_r\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};q;z\right]$$

が成り立つという理由からであろう。

q 超幾何級数の場合は有限級数の総和の順番を入れ替える、以下の操作が少し複雑なので、定理の形で書いておく。

定理 1.10.

$$
{}_{r+1}\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r,q^{-n}\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};z\right]=\frac{(a_1,\dots,a_r;q)_n}{(b_1,\dots,b_s;q)_n}\left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{s-r-1}\left(\frac{z}{q}\right)^n
\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{1-n}/b_1,\dots,q^{1-n}/b_s,q^{-n};q)_k}{(q^{1-n}/a_1,\dots,q^{1-n}/a_r,q;q)_k}\left(\frac{b_1\cdots b_s q^{1+n}}{a_1\cdots a_r z}\right)^k
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r,q^{-n}\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};z\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1,\dots,a_r,q^{-n};q)_k}{(b_1,\dots,b_s,q;q)_k}\left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{s-r} z^k\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1,\dots,a_r,q^{-n};q)_{n-k}}{(b_1,\dots,b_s,q;q)_{n-k}}\left((-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}}\right)^{s-r} z^{n-k}\\
&=\frac{(a_1,\dots,a_r;q)_n}{(b_1,\dots,b_s;q)_n}(-1)^n q^{\binom{n}{2}-n^2} z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{1-n}/b_1,\dots,q^{1-n}/b_s,q^{-n};q)_k}{(q^{1-n}/a_1,\dots,q^{1-n}/a_r,q;q)_k}\\
&\times\frac{(-q/a_1)^k q^{\binom{k}{2}-nk}\cdots(-q/a_r)^k q^{\binom{k}{2}-nk}(-q^{1+n})^k q^{\binom{k}{2}-nk}}{(-q/b_1)^k q^{\binom{k}{2}-nk}\cdots(-q/b_s)^k q^{\binom{k}{2}-nk}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk}}\left((-1)^{n-k} q^{\binom{n}{k}+\binom{k}{2}-nk+k}\right)^{s-r} z^{-k}\\
&=\frac{(a_1,\dots,a_r;q)_n}{(b_1,\dots,b_s;q)_n}(-1)^n q^{-\binom{n}{2}-n} z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{1-n}/b_1,\dots,q^{1-n}/b_s,q^{-n};q)_k}{(q^{1-n}/a_1,\dots,q^{1-n}/a_r,q;q)_k}\\
&\times\left((-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk+k}\right)^{r-s}\left((-1)^{n-k} q^{\binom{n}{k}+\binom{k}{2}-nk+k}\right)^{s-r}\left(\frac{b_1\cdots b_s q^{1+n}}{a_1\cdots a_r z}\right)^k\\
&=\frac{(a_1,\dots,a_r;q)_n}{(b_1,\dots,b_s;q)_n}\left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{s-r-1}\left(\frac{z}{q}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{1-n}/b_1,\dots,q^{1-n}/b_s,q^{-n};q)_k}{(q^{1-n}/a_1,\dots,q^{1-n}/a_r,q;q)_k}\left(\frac{b_1\cdots b_s q^{1+n}}{a_1\cdots a_r z}\right)^k
\end{aligned}
$$

□

定理 1.11.

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r,q^{-n}\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};z\right]\\
&=\frac{(a_1,\dots,a_r;q)_n}{(b_1,\dots,b_s;q)_n}q^{-\binom{n}{2}}\left(-\frac{z}{q}\right)^n{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}q^{1-n}/b_1,\dots,q^{1-n}/b_r,q^{-n}\\ q^{1-n}/a_1,\dots,q^{1-n}/a_r\end{matrix};\frac{b_1\cdots b_s q^{1+n}}{a_1\cdots a_r z}\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 1.10 において、$s=r$ とすればよい。 □

第 2 章

q 超幾何級数の変換公式

2.1 Heine の変換公式

この節では q 超幾何級数において、最も重要な公式である、Heine の変換公式を扱う。まずは次の q 二項定理から示すのが自然な流れだろう。この定理は、z について、q 差分することにより証明することもできるが、以下は直接的な係数比較で証明する。

定理 2.1. q 二項定理

$$ {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ; z \right] = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} $$

証明. 定理 1.7 と定理 1.9 より、

$$ \begin{aligned} \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)^k q^{\binom{k}{2}}}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} (-a)^k \end{aligned} $$

ここで、定理 1.5 より、

$$ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} (-a)^k = (a;q)_n $$

であるから、

$$ \begin{aligned} \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n \\ &= {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ; z \right] \end{aligned} $$

□

定理 2.2. q ベータ関数の q 積分表示

$$B_q(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} \frac{(tq;q)_\infty}{(tq^y;q)_\infty} \, d_q t$$

証明.

$$\begin{aligned} B_q(x,y) &= \frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)} \\ &= (1-q)\frac{(q,q^{x+y};q)_\infty}{(q^x,q^y;q)_\infty} \end{aligned}$$

ここで、q 二項定理より、

$$\begin{aligned} &= (1-q)\frac{(q,q^{x+y};q)_\infty}{(q^x,q^y;q)_\infty} \\ &= (1-q)\frac{(q;q)_\infty}{(q^y;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^y;q)_n}{(q;q)_n}q^{nx} \\ &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{1+n};q)_\infty}{(q^{n+y};q)_\infty}q^{nx} \\ &= \int_0^1 t^{x-1}\frac{(tq;q)_\infty}{(tq^y;q)_\infty}\, d_q t \end{aligned}$$

□

これは、ベータ関数の積分表示

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$

の q 類似になっている。次が重要な公式である。

定理 2.3. Heine の変換公式

$$\begin{aligned} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}; z\right] &= \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} c/b,z \\ az \end{matrix}; b\right] && (2.1) \\ &= \frac{(c/b,bz;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} abz/c,b \\ bz \end{matrix}; \frac{c}{b}\right] && (2.2) \\ &= \frac{(abz/c;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} c/a,c/b \\ c \end{matrix}; \frac{abz}{c}\right] && (2.3) \end{aligned}$$

証明. q 二項定理より、

$$\begin{aligned} \frac{(b;q)_n}{(c;q)_n} &= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\frac{(cq^n;q)_\infty}{(bq^n;q)_\infty} \\ &= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}b^k q^{nk} \end{aligned}$$

であるから、(2.1) 式は以下のように証明される。

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}\\
&= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}b^kq^{nk}\\
&= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}b^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^nq^{nk}\\
&= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}b^k\frac{(azq^k;q)_\infty}{(zq^k;q)_\infty}\\
&= \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b,z;q)_k}{(az,q;q)_k}b^k\\
&= \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,z\\az\end{matrix};b\right]
\end{aligned}
$$

(2.2) 式は、(2.1) 式の右辺に (2.1) 式を用いて、

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] &= \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}z,c/b\\az\end{matrix};b\right]\\
&= \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}\frac{(c/b,bz;q)_\infty}{(b,az;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}abz/c,b\\bz\end{matrix};c/b\right]\\
&= \frac{(c/b,bz;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}abz/c,b\\bz\end{matrix};c/b\right]
\end{aligned}
$$

(2.3) 式は、(2.2) 式の右辺に (2.1) 式を用いて、

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] &= \frac{(c/b,bz;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,abz/c\\bz\end{matrix};c/b\right]\\
&= \frac{(c/b,bz;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}\frac{(c,abz/c;q)_\infty}{(c/b,bz;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/a,c/b\\c\end{matrix};abz/c\right]\\
&= \frac{(abz/c;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/a,c/b\\c\end{matrix};abz/c\right]
\end{aligned}
$$

□

以降、単に Heine の変換公式といった場合、最初の式を指すものとする。最後の式は、Euler の変換公式

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] = (1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};z\right]
$$

の q 類似になっているが、一般にこれ以外の Heine の変換公式には、古典極限が存在しない。これは q 超幾何級数にしか存在しない式という意味で、非常に興味深い重要な式なのである。

定理 2.4.

$$
\begin{aligned}
{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix};z\right] &= \frac{(a,z;q)_\infty}{(b;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b/a,0\\z\end{matrix};a\right]\\
&= \frac{(b/a;q)_\infty}{(b;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}az/b,a\\0\end{matrix};\frac{b}{a}\right]\\
&= (az/b;q)_\infty\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b/a,0\\b\end{matrix};\frac{az}{b}\right]
\end{aligned}
$$

証明. Heine の変換公式

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] &= \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,z\\az\end{matrix};b\right]\\
&= \frac{(c/b,bz;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}abz/c,b\\bz\end{matrix};\frac{c}{b}\right]\\
&= \frac{(abz/c;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/a,c/b\\c\end{matrix};\frac{abz}{c}\right]
\end{aligned}
$$

において、$z\mapsto z/a$ として、$a\to\infty$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b\\c\end{matrix};z\right] &= \lim_{a\to\infty}\frac{(b,z;q)_\infty}{(c,z/a;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,z/a\\z\end{matrix};b\right]\\
&= \lim_{a\to\infty}\frac{(c/b,bz/a;q)_\infty}{(c,z/a;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}bz/c,b\\bz/a\end{matrix};\frac{c}{b}\right]\\
&= \lim_{a\to\infty}\frac{(bz/c;q)_\infty}{(z/a;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/a,c/b\\c\end{matrix};\frac{bz}{c}\right]
\end{aligned}
$$

これをそれぞれ計算して、

$$
\begin{aligned}
{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b\\c\end{matrix};z\right] &= \frac{(b,z;q)_\infty}{(c;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,0\\z\end{matrix};b\right]\\
&= \frac{(c/b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}bz/c,b\\0\end{matrix};\frac{c}{b}\right]\\
&= (bz/c;q)_\infty\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,0\\c\end{matrix};\frac{bz}{c}\right]
\end{aligned}
$$

ここで、$b\mapsto a,\, b\mapsto c$ として、定理を得る。 □

この最初の式は

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,0\\b\end{matrix};z\right] = \frac{1}{(z;q)_\infty}{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b/a\\b\end{matrix};az\right]
$$

と書き換えることができる。

系 2.1.

$$
{}_0\phi_1\left[\begin{matrix}-\\a\end{matrix};az\right] = (z;q)_\infty\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}0,0\\a\end{matrix};z\right]
$$

証明. 定理 2.4

$$
{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix};z\right] = (az/b;q)_\infty\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b/a,0\\b\end{matrix};\frac{az}{b}\right]
$$

において、$z \mapsto bz/a$ として、$a \to \infty$ とすると、

$$\begin{aligned}
{}_0\phi_1 \left[\begin{matrix} - \\ b \end{matrix}; bz\right] &= \lim_{a\to\infty} {}_1\phi_1 \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}; \frac{bz}{a}\right] \\
&= \lim_{a\to\infty} (z;q)_\infty \, {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} b/a, 0 \\ b \end{matrix}; z\right] \\
&= (z;q)_\infty \, {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} 0, 0 \\ b \end{matrix}; z\right]
\end{aligned}$$

ここで、$b \mapsto a$ として、式を得る。 □

系 2.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n^2} = \frac{1}{(z;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2} z^n$$

証明. 系 2.1 において、$c \mapsto q$ とすると、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n^2} &= {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} 0, 0 \\ q \end{matrix}; z\right] \\
&= \frac{1}{(z;q)_\infty} {}_0\phi_1 \left[\begin{matrix} - \\ q \end{matrix}; zq\right] \\
&= \frac{1}{(z;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2\binom{n}{2}}}{(q;q)_n^2} (zq)^n \\
&= \frac{1}{(z;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2} z^n
\end{aligned}$$

□

定理 2.5. Heine の和公式

$${}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; \frac{c}{ab}\right] = \frac{(c/a, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; q)_\infty}$$

証明. Heine の変換公式において、$z = c/ab$ とすると、

$$\begin{aligned}
{}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; \frac{c}{ab}\right] &= \frac{(b, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; q)_\infty} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} c/b, c/ab \\ c/b \end{matrix}; b\right] \\
&= \frac{(b, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; q)_\infty} {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} c/ab \\ - \end{matrix}; b\right] \\
&= \frac{(b, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; q)_\infty} \frac{(c/a; q)_\infty}{(b; q)_\infty} \\
&= \frac{(c/a, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; q)_\infty}
\end{aligned}$$

□

系 2.3.

$${}_1\phi_1 \left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \frac{c}{a}\right] = \frac{(c/a; q)_\infty}{(c; q)_\infty}$$

証明. Heine の和公式において、$b \to \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \frac{c}{a}\right] &= \lim_{b\to\infty} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; \frac{c}{ab}\right] \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{(c/a, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; a)_\infty} \\ &= \frac{(c/a; q)_\infty}{(c; q)_\infty} \end{aligned}$$

□

次の系は非常に美しい形をしていて、かなり重要な式かもしれない。

系 2.4.

$${}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ z \end{matrix}; z\right] = \frac{1}{(z; q)_\infty}$$

証明. 系 2.3 において、$a \to \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} {}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ c \end{matrix}; c\right] &= \lim_{a\to\infty} {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; \frac{c}{a}\right] \\ &= \lim_{a\to\infty} \frac{(c/a; q)_\infty}{(c; q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(c; q)_\infty} \end{aligned}$$

ここで、$c \to z$ として式を得る。 □

系 2.5.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n^2} = \frac{1}{(q; q)_\infty}$$

証明. 系 2.4 において、$z \mapsto q$ として、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2\binom{n}{2}}}{(q; q)_n^2} q^n \\ &= {}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ q \end{matrix}; q\right] \\ &= \frac{1}{(q; q)_\infty} \end{aligned}$$

□

先程の式と並べて書くと、

$$\frac{1}{(q; q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q; q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n^2}$$

のようになって面白い。

定理 2.6. q-Vandermonde の恒等式

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix}; \frac{cq^n}{b}\right] = \frac{(c/b; q)_n}{(c; q)_n} \tag{2.4}$$

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix}; q\right] = \frac{(c/b; q)_n}{(c; q)_n} b^n \tag{2.5}$$

証明. (2.4) 式は、Heine の和公式において、$a = q^{-n}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix}; \frac{cq^n}{b}\right] &= \frac{(cq^n, c/b; q)_\infty}{(c, cq^n/a; q)_\infty} \\
&= \frac{(c/b; q)_n}{(c; q)_n}
\end{aligned}
$$

(2.5) 式は、(2.4) 式に定理 1.11 を用いて、

$$
\begin{aligned}
\frac{(c/b; q)_n}{(c; q)_n} &= {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix}; \frac{cq^n}{b}\right] \\
&= \frac{(b; q)_n}{(c; q)_n} q^{-\binom{n}{2}} \left(-\frac{cq^{n-1}}{b}\right)^n {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^{1-n}/c, q^{-n} \\ q^{1-n}/b \end{matrix}; q\right]
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^{1-n}/c, q^{-n} \\ q^{1-n}/b \end{matrix}; q\right] &= \frac{(c; q)_n}{(b; q)_n} q^{\binom{n}{2}} \left(-\frac{bq^{1-n}}{c}\right)^n \frac{(c/b; q)_n}{(c; q)_n} \\
&= \left(-\frac{b}{c}\right)^n q^{-\binom{n}{2}} \frac{(c/b; q)_n}{(b; q)_n}
\end{aligned}
$$

ここで、$c \mapsto q^{1-n}/b, \quad b \mapsto q^{1-n}/c$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix}; q\right] &= \left(-\frac{b}{c}\right)^n q^{-\binom{n}{2}} \frac{(c/b; q)_n}{(q^{1-n}/c; q)_n} \\
&= \frac{(c/b; q)_n}{(c; q)_n} b^n
\end{aligned}
$$

□

系 2.6.

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} 0, q^{-n} \\ c \end{matrix}; q\right] = \frac{(-c)^n q^{\binom{n}{2}}}{(c; q)_n}
$$

証明. q-Vandermonde の恒等式

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix}; q\right] = \frac{(c/b; q)_n}{(c; q)_n} b^n
$$

において、$b \to 0$ とすればよい。 □

系 2.7.

$$
\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k}_q \binom{m}{k}_q q^{k^2} = \binom{n+m}{n}_q
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q \binom{m}{k}_q q^{k^2} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{-m}; q)_k}{(q; q)_k^2} q^{nk+mk-2\binom{k}{2}} q^{k^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, q^{-m}; q)_k}{(q; q)_k^2} q^{(1+n+m)k} \\
&= {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{-m} \\ q \end{matrix} q^{1+n+m}\right]
\end{aligned}
$$

ここで、q-Vandermonde の恒等式より、

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{-m} \\ q \end{matrix} q^{1+n+m}\right] &= \frac{(q^{1+m};q)_n}{(q;q)_n} \\
&= \frac{(q;q)_{n+m}}{(q;q)_n(q;q)_m} \\
&= \binom{n+m}{n}_q
\end{aligned}
$$

□

定理 2.7. Bailey-Daum の和公式

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a, b \\ aq/b \end{matrix}; -\frac{q}{b}\right] = \frac{(-q;q)_\infty (aq, aq^2/b^2; q^2)_\infty}{(aq/b, -q/b; q)_\infty}
$$

証明. Heine の変換公式より、

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, a \\ aq/b \end{matrix}; -\frac{q}{b}\right] &= \frac{(a,-q;q)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q/b, -q/b \\ -q \end{matrix}; a\right] \\
&= \frac{(a,-q;q)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q/b,-q/b;q)_n}{(-q,q;q)_n} a^n \\
&= \frac{(a,-q;q)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^2/b^2,;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} a^n \\
&= \frac{(a,-q;q)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty} \frac{(aq^2/b^2;q^2)_\infty}{(a;q^2)_\infty} \\
&= \frac{(-q;q)_\infty (aq, aq^2/b^2; q^2)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty}
\end{aligned}
$$

□

Bailey-Daum の和公式の古典極限は、少し難しいので、ここで導出することにする。

系 2.8. Kummer の定理

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ 1+a-b \end{matrix}; -1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}
$$

証明. Bailey-Daum の和公式より、

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-b\end{matrix};-1\right] &= \lim_{q\to 1}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^a,q^b\\q^{1+a-b}\end{matrix};-q^{1-b}\right]\\
&= \lim_{q\to 1}\frac{(-q;q)_\infty(q^{1+a},q^{2+a-2b};q^2)_\infty}{(q^{1+a-b},-q^{1-b};q)_\infty}\\
&= \lim_{q\to 1}\frac{(q^2;q^2)_\infty(q^{1-b};q)_\infty}{(q;q)_\infty(q^{2-2b};q^2)_\infty}\frac{(q^{1+a},q^{2+a-2b};q^2)_\infty}{(q^{1+a-b};q)_\infty}\\
&= \lim_{q\to 1}\frac{\Gamma_{q^2}(1-b)(1-q^2)^{-b}}{\Gamma_q(1-b)(1-q)^{-b}}\frac{(q^{1+a},q^{2+a-2b};q^2)_\infty}{(q^{1+a-b};q)_\infty}\\
&= 2^{-b}\lim_{q\to 1}\frac{(q^{1+a},q^{2+a-2b};q^2)_\infty}{(q^{1+a-b};q)_\infty}\\
&= 2^{-b}\lim_{q\to 1}\frac{(q^{1+a},q^{2+a-2b};q^2)_\infty}{(q^{1+a-b},q^{2+a-b};q^2)_\infty}\\
&= 2^{-b}\lim_{q\to 1}\frac{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1+a-b}{2}\right)\Gamma_{q^2}\left(1+\frac{a-b}{2}\right)}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma_{q^2}\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}\\
&= 2^{-b}\frac{\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a-b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}\\
&= 2^{-b}\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a-b}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}\\
&= 2^{-b}\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)2^{b-a}\sqrt{\pi}\Gamma(1+a-b)}{2^{-a}\sqrt{\pi}\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}\\
&= \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}
\end{aligned}$$

□

系 2.9.

$$ {}_1\phi_1\left[\begin{matrix}a\\0\end{matrix};-q\right] = (-q;q)_\infty(aq;q^2)_\infty $$

証明. Bailey-Daum の和公式において、$b\to\infty$ とすると、

$$\begin{aligned}
{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}a\\0\end{matrix};-q\right] &= \lim_{b\to\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\aq/b\end{matrix};-\frac{q}{b}\right]\\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{(-q;q)_\infty(aq,aq^2/b^2;q^2)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty}\\
&= (-q;q)_\infty(aq;q^2)_\infty
\end{aligned}$$

□

次もかなり重要な公式である。

定理 2.8. Jackson の ${}_2\phi_2$ 変換公式

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,c/b\\c,az\end{matrix};bz\right] $$

証明. q-Vandermonde の恒等式より、

$$\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n}\\c\end{matrix};bq^n\right]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(c/b,q^{-n};q)_k}{(c,q;q)_k}b^kq^{nk}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n\frac{(c/b,q^{-n};q)_k}{(c,q;q)_k}b^kq^{nk}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(c,q;q)_k}b^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(a;q)_n(q^{-n};q)_k}{(q;q)_n}z^nq^{nk}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(c,q;q)_k}b^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^kq^{\binom{k}{2}-nk}z^nq^{nk}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(c,q;q)_k}q^{\binom{k}{2}}(-b)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_{n-k}}z^n\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,c/b;q)_k}{(c,q;q)_k}q^{\binom{k}{2}}(-bz)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(aq^k;q)_n}{(q;q)_n}z^n\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,c/b;q)_k}{(c,q;q)_k}q^{\binom{k}{2}}(-bz)^k\frac{(azq^k;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\\
&= \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,c/b;q)_k}{(c,az,q;q)_k}q^{\binom{k}{2}}(-bz)^k\\
&= \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,c/b\\c,az\end{matrix};bz\right]
\end{aligned}$$

□

これは Pfaff の変換公式、

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] = (1-z)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,c-b\\c\end{matrix};-\frac{z}{1-z}\right]$$

の q 類似である。

定理 2.9.

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,b\\c,d\end{matrix};\frac{cd}{ab}\right] = \frac{(d/a;q)_\infty}{(d;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,c/b\\c\end{matrix};\frac{d}{a}\right]$$

証明. Jackson の ${}_2\phi_2$ 変換公式

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,c/b\\c,az\end{matrix};bz\right] = \frac{(z;q)_\infty}{(az;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right]$$

において、$b\mapsto c/b,\quad z\mapsto d/a$ とすると、

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,b\\c,d\end{matrix};\frac{cd}{ab}\right] = \frac{(d/a;q)_\infty}{(d;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,c/b\\c\end{matrix};\frac{d}{a}\right]$$

□

系 2.10.
$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,0\\c\end{matrix};z\right]=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_1\phi_2\left[\begin{matrix}a\\c,az\end{matrix};cz\right]
$$
証明. Jackson の ${}_2\phi_2$ 変換公式
$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right]=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,c/b\\c,az\end{matrix};bz\right]
$$
において、$b\to 0$ とすると、
$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,0\\c\end{matrix};z\right]&=\lim_{b\to 0}\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,c/b\\c,az\end{matrix};bz\right]\\
&=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_1\phi_2\left[\begin{matrix}a\\c,az\end{matrix};cz\right]
\end{aligned}
$$
□

系 2.11.
$$
{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b/a\\b\end{matrix};z\right]=(z;q)_\infty{}_1\phi_2\left[\begin{matrix}a\\b,z\end{matrix};\frac{bz}{a}\right]
$$
証明. 定理 2.4 と系 2.10 より、
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z;q)_\infty}{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b/a\\b\end{matrix};az\right]&={}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,0\\b\end{matrix};z\right]\\
&=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_1\phi_2\left[\begin{matrix}a\\b,az\end{matrix};bz\right]
\end{aligned}
$$
よって、
$$
{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b/a\\b\end{matrix};az\right]=(az;q)_\infty{}_1\phi_2\left[\begin{matrix}a\\b,az\end{matrix};bz\right]
$$
ここで、$z\mapsto z/a$ として、定理を得る。 □

系 2.12.
$$
{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}0\\a\end{matrix};z\right]=(z;q)_\infty{}_0\phi_2\left[\begin{matrix}-\\a,z\end{matrix};az\right]
$$
証明. 系 2.11 において、$a\to\infty$ とすると、
$$
{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}0\\c\end{matrix};z\right]=(z;q)_\infty{}_0\phi_2\left[\begin{matrix}-\\c,z\end{matrix};cz\right]
$$
ここで、$c\to a$ として、定理を得る。 □

系 2.13.
$$
(b;q)_\infty{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b/a\\b\end{matrix};c\right]=(c;q)_\infty{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}c/a\\c\end{matrix};b\right]
$$
証明. 系 2.10 の両辺に $(c;q)_\infty$ を掛けて、
$$
(b;q)_\infty{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b/a\\b\end{matrix};z\right]=(b;q)_\infty(z;q)_\infty{}_1\phi_2\left[\begin{matrix}a\\b,z\end{matrix};\frac{bz}{a}\right];
$$
ここで、右辺は b,z の対称式であるから、
$$
(b;q)_\infty{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b/a\\b\end{matrix};z\right]=(z;q)_\infty{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}z/a\\z\end{matrix};b\right]
$$
ここで、$z\mapsto c$ として、定理を得る。 □

系 2.14.

$$(a;q)_\infty {}_1\phi_1\begin{bmatrix}0\\a\end{bmatrix};b\Bigg] = (b;q)_\infty {}_1\phi_1\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix};a\Bigg]$$

証明. 系 2.13 において、$a\to\infty$ としてから、$b\mapsto a,\ c\mapsto b$ として定理を得る。 □

さて、Jackson の ${}_2\phi_2$ 変換公式と Bailey-Daum の和公式を用いることによって、${}_2\phi_2$ の和公式というものを導出することができる。それらは、古典極限をとると、${}_2F_1$ の和公式になるものである。

定理 2.10.

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,q/a\\b,-q\end{matrix};-b\right] = \frac{(ab,bq/a;q^2)_\infty}{(b;q)_\infty}$$

証明. 定理 2.9 より、

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,q/a\\b,-q\end{matrix};-b\right] = \frac{(-q/a;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,ab/q\\b\end{matrix};-\frac{q}{a}\right]$$

ここで、Bailey-Daum の和公式より、

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix}ab/q,a\\b\end{matrix};-\frac{q}{a}\right] = \frac{(-q;q)_\infty(ab,bq/a;q^2)_\infty}{(b,-q/a;q)_\infty}$$

よって、

$$\begin{aligned}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,q/a\\b,-q\end{matrix};-b\right] &= \frac{(-q/a;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}\frac{(-q;q)_\infty(ab,bq/a;q^2)_\infty}{(b,-q/a;q)_\infty}\\ &= \frac{(ab,bq/a;q^2)_\infty}{(b;q)_\infty}\end{aligned}$$

□

定理 2.11.

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,b\\\sqrt{abq},-\sqrt{abq}\end{matrix};-q\right] = \frac{(aq,bq;q^2)_\infty}{(q,abq;q^2)_\infty}$$

証明. 定理 2.9 より、

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,b\\\sqrt{abq},-\sqrt{abq}\end{matrix};-q\right] = \frac{(-\sqrt{ab/q};q)_\infty}{(-\sqrt{abq};q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,\sqrt{aq/b}\\\sqrt{abq}\end{matrix};-\sqrt{ab/q}\right]$$

ここで、Bailey-Daum の和公式より、

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,\sqrt{aq/b}\\\sqrt{abq}\end{matrix};-\sqrt{ab/q}\right] = \frac{(-q;q)_\infty(aq,bq;q^2)_\infty}{(\sqrt{abq},-\sqrt{ab/q};q)_\infty}$$

よって、

$$\begin{aligned}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,b\\\sqrt{abq},-\sqrt{abq}\end{matrix};-q\right] &= \frac{(-\sqrt{ab/q};q)_\infty}{(-\sqrt{abq};q)_\infty}\frac{(-q;q)_\infty(aq,bq;q^2)_\infty}{(\sqrt{abq},-\sqrt{ab/q};q)_\infty}\\ &= \frac{(-q;q)_\infty(aq,bq;q^2)_\infty}{(abq;q^2)_\infty}\end{aligned}$$

ここで、

$$(-q;q)_\infty = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}$$

を用いて、定理を得る。 □

これは ${}_2F_1$ の和公式

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ \frac{1+a+b}{2}\end{matrix};\frac{1}{2}\right]=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)} $$

の q 類似になっている。

次の定理はこの PDF においてさほど重要ではないので、興味がなければ読み飛ばしても問題ない。

定理 2.12.

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\ c\end{matrix};z\right]=\frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n}{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}b,bzq^{-n}/c,q^{-n}\\ bq^{1-n}/c,0\end{matrix};q\right] $$

証明. 定理 1.11 より、

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\ c\end{matrix};z\right]=\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}q^{-\binom{n}{2}}\left(-\frac{z}{q}\right)^n{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{1-n}/c,q^{-n}\\ q^{1-n}/b\end{matrix};\frac{cq^{1+n}}{bz}\right] $$

また、Jackson の ${}_2\phi_2$ 変換公式より、

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\ c\end{matrix};z\right]=\frac{(zq^{-n};q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n}\\ c,zq^{-n}\end{matrix};bz\right] $$

よって、

$$ \frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}q^{-\binom{n}{2}}\left(-\frac{z}{q}\right)^n{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{1-n}/c,q^{-n}\\ q^{1-n}/b\end{matrix};\frac{cq^{1+n}}{bz}\right]=\frac{(zq^{-n};q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n}\\ c,zq^{-n}\end{matrix};bz\right] $$

より、

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{1-n}/c,q^{-n}\\ q^{1-n}/b\end{matrix};\frac{cq^{1+n}}{bz}\right]=\frac{(c;q)_n}{(b;q)_n}q^{\binom{n}{2}}\left(-\frac{z}{q}\right)^n\frac{(zq^{-n};q)_\infty}{(z;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n}\\ c,zq^{-n}\end{matrix};bz\right] $$

ここで、$b\to q^{1-n}/c,\quad c\to q^{1-n}/b$ とすると、

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\ c\end{matrix};\frac{cq^{1+n}}{bz}\right]&=\frac{(zq^{-n};q)_\infty}{(z;q)_\infty}\frac{(q^{1-n}/b;q)_n}{(q^{1-n}/c;q)_n}\left(-\frac{q}{z}\right)^n q^{\binom{n}{2}}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n}\\ q^{1-n}/b,zq^{-n}\end{matrix};\frac{zq^{1-n}}{c}\right]\\ &=\frac{(zq^{-n};q)_\infty}{(z;q)_\infty}\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}\left(-\frac{cq}{bz}\right)^n q^{\binom{n}{2}}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n}\\ q^{1-n}/b,zq^{-n}\end{matrix};\frac{zq^{1-n}}{c}\right] \end{aligned} $$

$z\to cq^{1+n}/bz$ として、

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\ c\end{matrix};z\right]&=\frac{(cq/bz;q)_\infty}{(cq^{1+n}/bz;q)_\infty}\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}(-zq^{-n})^n q^{\binom{n}{2}}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n}\\ q^{1-n}/b,cq/bz\end{matrix};\frac{q^2}{bz}\right]\\ &=\frac{(cq/bz,b;q)_n}{(c;q)_n}(-z)^n q^{-\binom{1+n}{2}}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n}\\ q^{1-n}/b,cq/bz\end{matrix};\frac{q^2}{bz}\right] \end{aligned} $$

ここで、定理 1.11 より、

$$ \begin{aligned} &\frac{(cq/bz,b;q)_n}{(c;q)_n}(-z)^n q^{-\binom{1+n}{2}}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n}\\ q^{1-n}/b,cq/bz\end{matrix};\frac{q^2}{bz}\right]\\ &=\frac{(cq/bz,b;q)_n}{(c;q)_n}(-z)^n q^{-\binom{1+n}{2}}\frac{(c/b;q)_n}{(q^{1-n}/b,cq/bz;q)_n}\left(\frac{q}{bz}\right)^n{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}b,bzq^{-n}/c,q^{-n}\\ bq^{1-n}/c,0\end{matrix};q\right]\\ &=\frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n}{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}b,bzq^{-n}/c,q^{-n}\\ bq^{1-n}/c,0\end{matrix};q\right] \end{aligned} $$

となり、定理を得る。 □

定理 2.13.

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix}; z\right] = (bzq^{-n}/c;q)_n {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} c/b, q^{-n}, 0 \\ c, cq/bz \end{matrix}; q\right] \tag{2.6} $$

$$ = \frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n} b^n {}_3\phi_1\left[\begin{matrix} b, q/z, q^{-n} \\ bq^{1-n}/c \end{matrix}; \frac{z}{c}\right] \tag{2.7} $$

証明. まず、最初の式を示す。Vandermonde の恒等式を用いて、

$$ \begin{aligned} {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} c/b, q^{-n}, 0 \\ c, cq/bz \end{matrix}; q\right] &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(c/b, q^{-n};q)_k}{(c, cq/bz, q;q)_k} q^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(cq/bz, q;q)_k} q^k \sum_{j=0}^{k} \frac{(b, q^{-k};q)_j}{(c, q;q)_j} \left(\frac{cq^k}{b}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(b;q)_j}{(c, q;q)_j} \left(\frac{c}{b}\right)^j \sum_{k=j}^{n} \frac{(q^{-k};q)_j (q^{-n};q)_k}{(cq/bz, q;q)_k} q^{kj+k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(b;q)_j}{(c, q;q)_j} q^{\binom{j}{2}} \left(-\frac{c}{b}\right)^j \sum_{k=j}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_{k-j}(cq/bz;q)_k} q^k \end{aligned} $$

ここで、

$$ \begin{aligned} \sum_{k=j}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_{k-j}(cq/bz;q)_k} q^k &= \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(q^{-n};q)_{k+j}}{(q;q)_k (cq/bz;q)_{k+j}} q^{k+j} \\ &= \frac{(q^{-n};q)_j}{(cq/bz;q)_j} q^j \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(q^{j-n};q)_k}{(cq^{1+j}/bz, q;q)_k} q^k \\ &= \frac{(q^{-n};q)_j}{(cq/bz;q)_j} q^j {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} 0, q^{j-n} \\ cq^{1+j}/bz \end{matrix}; q\right] \end{aligned} $$

ここで、系 2.6 より、

$$ \frac{(q^{-n};q)_j}{(cq/bz;q)_j} q^j {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} 0, q^{j-n} \\ cq^{1+j}/bz \end{matrix}; q\right] = \frac{(q^{-n};q)_j}{(cq/bz;q)_j} q^j \frac{(-1)^{n-j} q^{\binom{n-j}{2}} (cq^{1+j}/bz)^{n-j}}{(cq^{1+j}/bz;q)_{n-j}} $$

よって、

$$
\begin{aligned}
&{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}c/b, q^{-n}, 0\\ c, cq/bz\end{matrix}; q\right]\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(b;q)_j}{(c,q;q)_j}q^{\binom{j}{2}}\left(-\frac{c}{b}\right)^j\frac{(q^{-n};q)_j}{(cq/bz;q)_j}q^j\frac{(-1)^{n-j}q^{\binom{n-j}{2}}(cq^{1+j}/bz)^{n-j}}{(cq^{1+j}/bz;q)_{n-j}}\\
&=\frac{(-cq/bz)^n}{(cq/bz;q)_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(b,q^{-n};q)_j}{(c,q;q)_j}q^{\binom{j}{2}}\left(\frac{cq}{b}\right)^j\left(\frac{bz}{cq^{1+j}}\right)^j q^{\binom{n-j}{2}+nj}\\
&=\frac{(-cq/bz)^n}{(cq/bz;q)_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(b,q^{-n};q)_j}{(c,q;q)_j}q^{\binom{j}{2}}(zq^{-j})^j q^{\binom{n}{2}+\binom{j}{2}+j}\\
&=\frac{(-cq/bz)^n q^{\binom{n}{2}}}{(cq/bz;q)_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(b,q^{-n};q)_j}{(c,q;q)_j}z^j\\
&=\frac{1}{(bzq^{-n}/c;q)_n}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b, q^{-n}\\ c\end{matrix}; z\right]
\end{aligned}
$$

よって、

$$
{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}c/b, q^{-n}, 0\\ c, cq/bz\end{matrix}; q\right]=\frac{1}{(bzq^{-n}/c;q)_n}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b, q^{-n}\\ c\end{matrix}; z\right]
$$

両辺に $(bzq^{-n}/c;q)_n$ を掛けて、最初の式が示された。次に二つ目の式を示す。
定理 1.11 より、

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b, q^{-n}\\ c\end{matrix}; z\right]=\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}q^{-\binom{n}{2}}\left(-\frac{z}{q}\right)^n{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{1-n}/c, q^{-n}\\ q^{1-n}/b\end{matrix}; \frac{cq^{1+n}}{bz}\right]
$$

ここで、さきほど示した式より、

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{1-n}/c, q^{-n}\\ q^{1-n}/b\end{matrix}; \frac{cq^{1+n}}{bz}\right]=(q/z;q)_n{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}c/b, q^{-n}, 0\\ q^{1-n}/b, zq^{-n}\end{matrix}; q\right]
$$

よって、

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b, q^{-n}\\ c\end{matrix}; z\right]=\frac{(b,q/z;q)_n}{(c;q)_n}q^{-\binom{n}{2}}\left(-\frac{z}{q}\right)^n{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}c/b, q^{-n}, 0\\ q^{1-n}/b, zq^{-n}\end{matrix}; q\right]
$$

ここで、定理 1.10 より、

$$
{}_3\phi_1\left[\begin{matrix}b, q/z, q^{-n}\\ bq^{1-n}/c\end{matrix}; \frac{z}{c}\right]=\frac{(b,q/z;q)_n}{(bq^{1-n}/c;q)_n}q^{-2\binom{n}{2}}\left(\frac{z}{cq}\right)^n{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}c/b, q^{-n}, 0\\ q^{1-n}/b, zq^{-n}\end{matrix}; q\right]
$$

であるから、

$$
{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}c/b, q^{-n}, 0\\ q^{1-n}/b, zq^{-n}\end{matrix}; q\right]=\frac{(bq^{1-n}/c;q)_n}{(b,q/z;q)_n}q^{2\binom{n}{2}}\left(\frac{cq}{z}\right)^n{}_3\phi_1\left[\begin{matrix}b, q/z, q^{-n}\\ bq^{1-n}/c\end{matrix}; \frac{z}{c}\right]
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix}; z\right] &= \frac{(b, q/z; q)_n}{(c; q)_n} q^{-\binom{n}{2}} \left(-\frac{z}{q}\right)^n \frac{(bq^{1-n}/c; q)_n}{(b, q/z; q)_n} q^{2\binom{n}{2}} \left(\frac{cq}{z}\right)^n {}_3\phi_1\left[\begin{matrix} b, q/z, q^{-n} \\ bq^{1-n}/c \end{matrix}; \frac{z}{c}\right] \\
&= \frac{(bq^{1-n}/c; q)_n}{(c; q)_n} q^{\binom{n}{2}} (-c)^n {}_3\phi_1\left[\begin{matrix} b, q/z, q^{-n} \\ bq^{1-n}/c \end{matrix}; \frac{z}{c}\right] \\
&= \frac{(c/b; q)_n}{(c; q)_n} b^n {}_3\phi_1\left[\begin{matrix} b, q/z, q^{-n} \\ bq^{1-n}/c \end{matrix}; \frac{z}{c}\right]
\end{aligned}
$$

となり、定理を得る。 □

2.2 Jackson の ${}_8\phi_7$ 和公式

さて、これから高位の q 超幾何級数を扱うことになるが、やることは古典の場合とあまり変わらないので、それほど身構える必要はない。

定理 2.14. q-Saalschütz の和公式

$$
{}_3\phi_2\left[\begin{matrix} a, b, q^{-n} \\ c, abq^{1-n}/c \end{matrix}; q\right] = \frac{(c/a, c/b; q)_n}{(c, c/ab; q)_n}
$$

証明. Heine の変換公式

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right] = \frac{(abz/c; q)_\infty}{(z; q)_\infty} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} c/a, c/b \\ c \end{matrix}; \frac{abz}{c}\right]
$$

において、$a \to c/a, \quad b \to c/b$ とすると、

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} c/a, c/b \\ c \end{matrix}; z\right] = \frac{(cz/ab; q)_\infty}{(z; q)_\infty} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; \frac{cz}{ab}\right]
$$

ここで、q 二項定理より、

$$
\frac{(cz/ab; q)_\infty}{(z; q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/ab; q)_n}{(q; q)_n} z^n
$$

であることを用いて、両辺の z の係数を比較すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{(c/a, c/b; q)_n}{(c, q; q)_n} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a, b; q)_k}{(c, q; q)_k} \left(\frac{c}{ab}\right)^k \frac{(c/ab; q)_{n-k}}{(q; q)_{n-k}} \\
&= \frac{(c/ab; q)_n}{(q; q)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(a, b, q^{-n}; q)_k}{(c, abq^{1-n}/c, q; q)_k} q^k \\
&= \frac{(c/ab; q)_n}{(q; q)_n} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a, b, q^{-n} \\ c, abq^{1-n}/c \end{matrix}; q\right]
\end{aligned}
$$

よって、

$$
{}_3\phi_2\left[\begin{matrix} a, b, q^{-n} \\ c, abq^{1-n}/c \end{matrix}; q\right] = \frac{(c/a, c/b; q)_n}{(c, c/ab; q)_n}
$$

□

これは Saalschütz の和公式

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, -n \\ c, 1-n+a+b-c \end{matrix}; 1\right] = \frac{(c-a, c-b)_n}{(c, c-a-b)_n} $$

の q 類似になっている。

系 2.15.

$$ {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc, aq^n, q^{-n} \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; q\right] = \frac{(b, c; q)_n}{(aq/b, aq/c; q)_n}\left(\frac{aq}{bc}\right)^n $$

証明. q-Saalschütz の和公式において、$a \to aq/bc, \quad b \to aq^n, \quad c \to aq/b$ とすると、

$$ \begin{aligned} {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc, aq^n, q^{-n} \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; q\right] &= \frac{(c, q^{1-n}/b; q)_n}{(aq/b, cq^{-n}/a; q)_n} \\ &= \frac{(b, c; q)_n}{(aq/b, aq/c; q)_n}\left(\frac{aq}{bc}\right)^n \end{aligned} $$

□

定理 2.15.

$$ \begin{aligned} &{}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix} a, b, c, a_1, \dots, a_r, q^{-n} \\ aq/b, aq/c, b_1, \dots, b_{r+1} \end{matrix}; z\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(aq/bc, a_1, \dots, a_r, q^{-n}; q)_k (a; q)_{2k}}{(aq/b, aq/c, b_1, \dots, b_{r+1}, q; q)_k} q^{-\binom{k}{2}} \left(-\frac{bcz}{aq}\right)^k {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} aq^{2k}, a_1q^k, \dots, a_rq^k, q^{k-n} \\ b_1q^k, \dots, b_{r+1}q^k \end{matrix}; \frac{bcz}{aq^{1+k}}\right] \end{aligned} $$

証明. 系 2.15 より、

$$ \frac{(b, c; q)_n}{(aq/b, aq/c; q)_n} = \left(\frac{bc}{aq}\right)^n {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc, aq^n, q^{-n} \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; q\right] $$

よって、

$$ \begin{aligned} &{}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix} a, b, c, a_1, \dots, a_r, q^{-n} \\ aq/b, aq/c, b_1, \dots, b_{r+1} \end{matrix}; z\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a, b, c, a_1, \dots, a_r, q^{-n}; q)_k}{(aq/b, aq/c, b_1, \dots, b_{r+1}, q; q)_k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a, a_1, \dots, a_r, q^{-n}; q)_k}{(b_1, \dots, b_{r+1}, q; q)_k} z^k \left(\frac{bc}{aq}\right)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{(aq/bc, aq^k, q^{-k}; q)_j}{(aq/b, aq/c, q; q)_j} q^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} \frac{(a, a_1, \dots, a_r, q^{-n}; q)_k}{(b_1, \dots, b_{r+1}, q; q)_k} \left(\frac{bcz}{aq}\right)^k \frac{(aq/bc, aq^k, q^{-k}; q)_j}{(aq/b, aq/c, q; q)_j} q^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(aq/bc; q)_j}{(aq/b, aq/c, q; q)_j} q^{\binom{j}{2}} (-q)^j \sum_{k=j}^{n} \frac{(a_1, \dots, a_r, q^{-n}; q)_k}{(b_1, \dots, b_{r+1}; q)_k} \left(\frac{bcz}{aq}\right)^k \frac{(a; q)_{k+j}}{(q; q)_{k-j}} q^{-kj} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(aq/bc; q)_j}{(aq/b, aq/c, q; q)_j} q^{\binom{j}{2}} (-q)^j \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(a_1, \dots, a_r, q^{-n}; q)_{k+j}}{(b_1, \dots, b_{r+1}; q)_{k+j}} \left(\frac{bcz}{aq}\right)^{k+j} \frac{(a; q)_{k+2j}}{(q; q)_k} q^{-j(k+j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(aq/bc, a_1, \dots, a_r, q^{-n}; q)_j (a; q)_{2j}}{(aq/b, aq/c, b_1, \dots, b_{r+1}, q; q)_j} q^{-\binom{j}{2}} \left(-\frac{bcz}{aq}\right)^j \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(aq^{2j}, a_1q^j, \dots, a_rq^j, q^{j-n}; q)_k}{(b_1q^j, \dots, b_{r+1}q^j, q; q)_k} \left(\frac{bcz}{aq^{1+j}}\right)^k \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(aq/bc, a_1, \dots, a_r, q^{-n}; q)_j (a; q)_{2j}}{(aq/b, aq/c, b_1, \dots, b_{r+1}, q; q)_j} q^{-\binom{j}{2}} \left(-\frac{bcz}{aq}\right)^j {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} aq^{2j}, a_1q^j, \dots, a_rq^j, q^{j-n} \\ b_1q^k, \dots, b_{r+1}q^k \end{matrix}; \frac{bcz}{aq^{1+j}}\right] \end{aligned} $$

ここで、$j \to k$ として、定理を得る。 $\square$

補題 2.1.

$$ {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n} \end{matrix} ; q^n \right] = \delta_{n,0} $$

証明. 定理 2.15 より、

$$ \begin{aligned} &{}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n} \end{matrix} ; q^n \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k (a; q)_{2k}}{(\sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n}, q; q)_k} q^{-\binom{k}{2}} q^{(1+n)k} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} aq^{2k}, q^{k-n} \\ aq^{1+n+k} \end{matrix} ; -q^{1+n-k} \right] \end{aligned} $$

ここで、Bailey-Daum の和公式より、

$$ {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} aq^{2k}, q^{k-n} \\ aq^{1+n+k} \end{matrix} ; -q^{1+n-k} \right] = \frac{(-q; q)_\infty (aq^{1+2k}, aq^{2+2n}; q^2)_\infty}{(aq^{1+n+k}, -q^{1+n-k}; q)_\infty} $$

よって、

$$ \begin{aligned} &{}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n} \end{matrix} ; q^n \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k (a; q)_{2k}}{(\sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n}, q; q)_k} q^{-\binom{k}{2}} q^{(1+n)k} \frac{(-q; q)_\infty (aq^{1+2k}, aq^{2+2n}; q^2)_\infty}{(aq^{1+n+k}, -q^{1+n-k}; q)_\infty} \\ &= \frac{(aq^{2+2n}; q^2)_\infty}{(aq; q)_\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k (aq; q^2)_k (aq^{1+2k}; q^2)_\infty (aq; q)_{n+k} (-q; q)_{n-k}}{(aq^{1+n}, q; q)_k} q^{(1+n)k - \binom{k}{2}} \\ &= \frac{(aq^{2+2n}, aq; q^2)_\infty (aq; q)_n}{(aq; q)_\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k (-q; q)_{n-k}}{(q; q)_k} q^{(1+n)k - \binom{k}{2}} \\ &= \frac{(aq^{2+2n}, aq; q^2)_\infty (aq, -q; q)_n}{(aq; q)_\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k}{(-q^{-n}, q; q)_k} q^k \\ &= \frac{(aq^{2+2n}, aq; q^2)_\infty (aq, -q; q)_n}{(aq; q)_\infty} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} -q^{-1}, q^{-n} \\ -q^{-n} \end{matrix} ; q \right] \end{aligned} $$

ここで、Vandermonde の恒等式より、$n \geq 1$ のとき、

$$ {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} -q^{-1}, q^{-n} \\ -q^{-n} \end{matrix} ; q \right] = \frac{(q^{1-n}; q)_n}{(-q^{-n}; q)_n} (-q^{-1})^n = 0 $$

また、$n = 0$ のとき、

$$ {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n} \end{matrix} ; q^n \right] = 1 $$

であるから定理を得る。 $\square$

補題 2.2.

$$ {}_6\phi_5 \left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq^{1+n} \end{matrix} ; \frac{aq^{1+n}}{bc} \right] = \frac{(aq, aq/bc; q)_n}{(aq/bc, aq/c; q)_n} $$

証明. 定理 2.15 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_6\phi_5\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq^{1+n}\end{matrix};\frac{aq^{1+n}}{bc}\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(aq/bc,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,q^{-n};q)_k(a;q)_{2k}}{(aq/b,aq/c,\sqrt{a},-\sqrt{a},aq^{1+n},q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}(-q^n)^k\\
&\times{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq^{2k},\sqrt{a}q^{1+k},-\sqrt{a}q^{1+k},q^{k-n}\\ \sqrt{a}q^k,-\sqrt{a}q^k,aq^{1+n+k}\end{matrix};q^{n-k}\right]
\end{aligned}
$$

補題 2.1 より、

$$
{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq^{2k},\sqrt{a}q^{1+k},-\sqrt{a}q^{1+k},q^{k-n}\\ \sqrt{a}q^k,-\sqrt{a}q^k,aq^{1+n+k}\end{matrix};q^{n-k}\right]=\delta_{n-k,0}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\frac{(aq/bc,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,q^{-n};q)_k(a;q)_{2k}}{(aq/b,aq/c,\sqrt{a},-\sqrt{a},aq^{1+n},q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}(-q^n)^k\\
&\times{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq^{2k},\sqrt{a}q^{1+k},-\sqrt{a}q^{1+k},q^{k-n}\\ \sqrt{a}q^k,-\sqrt{a}q^k,aq^{1+n+k}\end{matrix};q^{n-k}\right]\\
&=\frac{(aq/bc,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,q^{-n};q)_n(a;q)_{2n}}{(aq/b,aq/c,\sqrt{a},-\sqrt{a},aq^{1+n},q;q)_n}q^{-\binom{n}{2}}(-q^n)^n\\
&=\frac{(aq/bc;q)_n}{(aq/b,aq/c;q)_n}\times\frac{(\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q;q)_n(a;q)_{2n}}{(\sqrt{a},-\sqrt{a},aq^{1+n};q)_n}\times(-1)^n\frac{(q^{-n};q)_n}{(q;q)_n}q^{n^2-\binom{n}{2}}\\
&=\frac{(aq/bc;q)_n}{(aq/b,aq/c;q)_n}\times\frac{(1-aq^{2n})(a;q)_{2n}}{(1-a)(aq^{1+n};q)_n}\\
&=\frac{(aq/bc;q)_n}{(aq/b,aq/c;q)_n}\times\frac{(aq;q)_{2n}}{(aq^{1+n};q)_n}\\
&=\frac{(aq/bc;q)_n}{(aq/b,aq/c;q)_n}\times(aq;q)_n\\
&=\frac{(aq,aq/bc;q)_n}{(aq/bc,aq/c;q)_n}
\end{aligned}
$$

□

定理 2.16. Watson の ${}_8\phi_7$ 変換公式

$$
\begin{aligned}
&{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n}\end{matrix};\frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right]\\
&=\frac{(aq,aq/de;q)_n}{(aq/d,aq/e;q)_n}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq/bc,d,e,q^{-n}\\ aq/b,aq/c,deq^{-n}/a\end{matrix};q\right]
\end{aligned}
$$

証明. 定理 2.15 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n}\end{matrix};\frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(aq/bc,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,d,e,q^{-n};q)_k(a;q)_{2k}}{(aq/b,aq/c,\sqrt{a},-\sqrt{a},aq/d,/aq/e,aq^{1+n},q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}\left(\frac{aq^{1+n}}{de}\right)^k\\
&\times{}_6\phi_5\left[\begin{matrix}aq^{2k},\sqrt{a}q^{1+k},-\sqrt{a}q^{1+k},dq^k,eq^k,q^{k-n}\\ \sqrt{a}q^k,-\sqrt{a}q^k,aq^{1+k}/d,aq^{1+k}/e,aq^{1+n+k}\end{matrix};\frac{aq^{1+n-k}}{de}\right]
\end{aligned}
$$

補題 2.2 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_6\phi_5\left[\begin{matrix} aq^{2k}, \sqrt{a}q^{1+k}, -\sqrt{a}q^{1+k}, dq^k, eq^k, q^{k-n} \\ \sqrt{a}q^k, -\sqrt{a}q^k, aq^{1+k}/d, aq^{1+k}/e, aq^{1+n+k} \end{matrix}; \frac{aq^{1+n-k}}{de}\right] \\
&= \frac{(aq^{1+2k}, aq/de; q)_{n-k}}{(aq^{1+k}/d, aq^{1+k}/e; q)_{n-k}} \\
&= \frac{(aq;q)_{n+k}}{(aq;q)_{2k}} \frac{(aq/d, aq/e; q)_k}{(aq/d, aq/e; q)_n} \frac{(aq/de;q)_n}{(deq^{-n}/a;q)_k} \left(-\frac{de}{a}\right)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \\
&= \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} \frac{(aq/d, aq/e, aq^{1+n}; q)_k}{(aq;q)_{2k}(deq^{-n}/a;q)_k} \left(-\frac{de}{a}\right)^k q^{\binom{k}{2}-nk}
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{(aq/bc, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, d, e, q^{-n}; q)_k (a;q)_{2k}}{(aq/b, aq/c, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/d, /aq/e, aq^{1+n}, q; q)_k} q^{-\binom{k}{2}} \left(\frac{aq^{1+n}}{de}\right)^k \\
&\times {}_6\phi_5\left[\begin{matrix} aq^{2k}, \sqrt{a}q^{1+k}, -\sqrt{a}q^{1+k}, dq^k, eq^k, q^{k-n} \\ \sqrt{a}q^k, -\sqrt{a}q^k, aq^{1+k}/d, aq^{1+k}/e, aq^{1+n+k} \end{matrix}; \frac{aq^{1+n-k}}{de}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(aq/bc, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, d, e, q^{-n}; q)_k (a;q)_{2k}}{(aq/b, aq/c, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/d, /aq/e, aq^{1+n}, q; q)_k} q^{-\binom{k}{2}} \left(\frac{aq^{1+n}}{de}\right)^k \\
&\times \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} \frac{(aq/d, aq/e, aq^{1+n}; q)_k}{(aq;q)_{2k}(deq^{-n}/a;q)_k} \left(-\frac{de}{a}\right)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \\
&= \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(aq/bc, d, e, q^{-n}; q)_k}{(aq/b, aq/c, deq^{-n}/a, q; q)_k} \frac{(\sqrt{a}q, -\sqrt{a}q; q)_k (a;q)_{2k}}{(\sqrt{a}, -\sqrt{a}; q)_k (aq;q)_{2k}} q^k \\
&= \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(aq/bc, d, e, q^{-n}; q)_k}{(aq/b, aq/c, deq^{-n}/a, q; q)_k} q^k \\
&= \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} aq/bc, d, e, q^{-n} \\ aq/b, aq/c, deq^{-n}/a \end{matrix}; q\right]
\end{aligned}
$$

□

定理 2.17. Jackson の ${}_8\phi_7$ 和公式
$a^2q^{1+n} = bcde$ であるとき、

$$
{}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{1+n} \end{matrix}; q\right] = \frac{(aq, aq/bc, aq/bd, aq/cd; q)_n}{(aq/b, aq/c, aq/d, aq/bcd; q)_n}
$$

証明. Watson の ${}_8\phi_7$ 変換公式において、$a^2q^{1+n} = bcde$ であるとき、

$$
a^2q^{2+n}/bcde = q, \quad aq/bc = deq^{-n}/a
$$

であるから、

$$
{}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{1+n} \end{matrix}; q\right] = \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} d, e, q^{-n} \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; q\right]
$$

右辺の ${}_3\phi_2$ は balanced だから、q-Saalschütz の和公式より、

$$
{}_3\phi_2\left[\begin{matrix} d, e, q^{-n} \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; q\right] = \frac{(aq/bd, aq/be; q)_n}{(aq/b, aq/bde; q)_n}
$$

よって、

$$
{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n}\end{matrix};q\right]=\frac{(aq,aq/de;q)_n}{(aq/d,aq/e;q)_n}\frac{(aq/bd,aq/be;q)_n}{(aq/b,aq/bde;q)_n}
$$
$$
=\frac{(aq,aq/bd,aq/be,aq/de;q)_n}{(aq/b,aq/d,aq/e,aq/bde;q)_n}
$$

e と c を入れ替えて、定理を得る。 □

これは Dougall の和公式、$1+2a+n=b+c+d+e$ のとき、

$$
{}_7F_6\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,-n\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a+n\end{matrix};1\right]
=\frac{(1+a,1+a-b-c,1+a-b-d,1+a-c-d)_n}{(1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-b-c-d)_n}
$$

の q 類似になっていて、Dougall の和公式がより一般の等式を導出するのに用いられたように、q 超幾何級数においても Jackson の ${}_8\phi_7$ 和公式を用いることができる。

定理 2.18.

$$
{}_6\phi_5\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d\end{matrix};\frac{aq}{bcd}\right]=\frac{(aq,aq/bc,aq/bd,aq/cd;q)_\infty}{(aq/b,aq/c,aq/d,aq/bcd;q)_\infty}
$$

証明. Jackson の ${}_8\phi_7$ 和公式において、$e=a^2q^{1+n}/bcd$ より、

$$
{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,bcdq^{-n}/a,aq^{1+n}\end{matrix};q\right]=\frac{(aq,aq/bc,aq/bd,aq/cd;q)_n}{(aq/b,aq/c,aq/d,aq/bcd;q)_n}
$$

である。ここで、$n\to\infty$ とすると、

$$
{}_6\phi_5\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d\end{matrix};\frac{aq}{bcd}\right]=\lim_{n\to\infty}{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,bcdq^{-n}/a,aq^{1+n}\end{matrix};q\right]
$$
$$
=\frac{(aq,aq/bc,aq/bd,aq/cd;q)_\infty}{(aq/b,aq/c,aq/d,aq/bcd;q)_\infty}
$$

となって定理を得る。これは補題 2.2 の一般化になっていて、非常に美しい形をしている。 □

定理 2.19. q-Dixon の恒等式

$$
{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}a,-\sqrt{a}q,b,c\\ -\sqrt{a},aq/b,aq/c\end{matrix};\frac{\sqrt{a}q}{bc}\right]=\frac{(aq,aq/bc,\sqrt{a}q/b,\sqrt{a}q/c;q)_\infty}{(aq/b,aq/c,\sqrt{a}q,\sqrt{a}q/bc;q)_\infty}
$$

証明. 定理 2.18 において、$d\mapsto\sqrt{a}$ とすればよい。 □

これは Dixon の恒等式、

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\ 1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma\left(1+a\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)\Gamma\left(1+a-b-c\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1+a-b\right)\Gamma\left(1+a-c\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}
$$

の q 類似になっているが、より直接的な q 類似

$$
{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\ aq/b,aq/c\end{matrix};z\right]
$$

の形ではない。

定理 2.20.

$$
{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,b,c\\ \sqrt{a},aq/b,aq/c\end{matrix};-\frac{\sqrt{a}q}{bc}\right]=\frac{(aq,aq/bc,-\sqrt{a}q/b,-\sqrt{a}q/c;q)_\infty}{(aq/b,aq/c,-\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q/bc;q)_\infty}
$$

証明. 定理 2.18 において、$d\mapsto -\sqrt{a}$ とすればよい。 □

定理 2.21.

$$
{}_5\phi_5\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,0\end{matrix};\frac{aq}{bc}\right]=\frac{(aq,aq/bc;q)_\infty}{(aq/b,aq/c;q)_\infty}
$$

証明. 定理 2.18 において、$d\to\infty$ とすればよい。 □

系 2.16.

$$
{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b\end{matrix};\frac{1}{b}\right]=0,\quad |b|>1
$$

証明. 定理 2.21 において、$c\to q^n$ として、$n\to\infty$ とすると、

$$
\begin{aligned}
{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b\end{matrix};\frac{1}{b}\right]&=\lim_{n\to\infty}{}_5\phi_5\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,q^n\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq^{1-n},0\end{matrix};\frac{aq^{1-n}}{b}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(aq,aq^{1-n}/b;q)_\infty}{(aq/b,aq^{1-n};q)_\infty}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(aq;q)_{-n}}{(aq/b;q)_{-n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(b/a;q)_n}{(1/a;q)_n}\frac{(-1/a)^n}{(-b/a)^n}\\
&=\frac{(b/a;q)_\infty}{(1/a;q)_\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^n}\\
&=0
\end{aligned}
$$

□

これは補題 2.1 の一般化になっている。

2.3 Watson の ${}_8\phi_7$ 変換公式

Watson の ${}_8\phi_7$ 変換公式を用いることで、多くの変換公式を得ることができる。

$$
\begin{aligned}
&{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n}\end{matrix};\frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right]\\
&=\frac{(aq,aq/de;q)_n}{(aq/d,aq/e;q)_n}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq/bc,d,e,q^{-n}\\ aq/b,aq/c,deq^{-n}/a\end{matrix};q\right]
\end{aligned}
$$

これは Whipple の変換公式、

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,-n\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+a,1+a-d-e)_n}{(1+a-d,1+a-e)_n}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e,-n\\ 1+a-b,1+a-c,d+e-n-a\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
$$

の q 類似になっている。Whipple の変換公式から、様々な変換公式が得られたのと同様に多くの変換公式を導出することができる。

定理 2.22.

$$ {}_7\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, 0 \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{bcde}\right] = \frac{(aq, aq/de; q)_\infty}{(aq/d, aq/e; q)_\infty} {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc, d, e \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; \frac{aq}{de}\right] $$

証明. Watson の ${}_8\phi_7$ 変換公式において、$n \to \infty$ として

$$ \begin{aligned} & {}_7\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, 0 \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{bcde}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} {}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{1+n} \end{matrix}; \frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} aq/bc, d, e, q^{-n} \\ aq/b, aq/c, deq^{-n}/a \end{matrix}; q\right] \\ &= \frac{(aq, aq/de; q)_\infty}{(aq/d, aq/e; q)_\infty} {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc, d, e \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; \frac{aq}{de}\right] \end{aligned} $$

□

以降、複数個の 0 が並ぶときは $-$ と略記する。

系 2.17.

$$ \begin{aligned} {}_6\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, - \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{bcd}\right] &= \frac{(aq; q)_\infty}{(aq/d; q)_\infty} {}_2\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc, d \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; \frac{aq}{d}\right] && (2.8) \\ &= \frac{(aq, aq/cd; q)_\infty}{(aq/c, aq/d; q)_\infty} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} c, d \\ aq/b \end{matrix}; \frac{aq}{cd}\right] && (2.9) \end{aligned} $$

証明. (2.8) 式は定理 2.22 において、$e \to \infty$ として、

$$ \begin{aligned} & {}_6\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, - \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{bcd}\right] \\ &= \lim_{e\to\infty} {}_7\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, 0 \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{bcde}\right] \\ &= \lim_{e\to\infty} \frac{(aq, aq/de; q)_\infty}{(aq/d, aq/e; q)_\infty} {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc, d, e \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; \frac{aq}{de}\right] \\ &= \frac{(aq; q)_\infty}{(aq/d; q)_\infty} {}_2\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc, d \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; \frac{aq}{d}\right] \end{aligned} $$

(2.9) 式は定理 2.22 において、$c \to \infty$ として、

$$ \begin{aligned} & {}_6\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, d, e \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/d, aq/e, - \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{bcd}\right] \\ &= \lim_{c\to\infty} {}_7\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, 0 \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{bcde}\right] \\ &= \lim_{c\to\infty} \frac{(aq, aq/de; q)_\infty}{(aq/d, aq/e; q)_\infty} {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc, d, e \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; \frac{aq}{de}\right] \\ &= \frac{(aq, aq/de; q)_\infty}{(aq/d, aq/e; q)_\infty} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} d, e \\ aq/b \end{matrix}; \frac{aq}{de}\right] \end{aligned} $$

$e \mapsto c$ として、式を得る。 □

系 2.18.

$$
{}_5\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,-\end{matrix};\frac{a^2q^2}{bc}\right]=(aq;q)_\infty\,{}_1\phi_2\left[\begin{matrix}aq/bc\\ aq/b,aq/c\end{matrix};aq\right] \tag{2.10}
$$

$$
=\frac{(aq;q)_\infty}{(aq/c;q)_\infty}{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}c\\ aq/b\end{matrix};\frac{aq}{c}\right] \tag{2.11}
$$

$$
=\frac{(aq,aq/bc;q)_\infty}{(aq/b,aq/c;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,c\\ 0\end{matrix};\frac{aq}{bc}\right] \tag{2.12}
$$

証明. (2.10) 式は、(2.8) 式において、$d\to\infty$ として、

$$
\begin{aligned}
&{}_5\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,-\end{matrix};\frac{a^2q^2}{bc}\right]\\
&=\lim_{d\to\infty}{}_6\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,-\end{matrix};\frac{a^2q^2}{bcd}\right]\\
&=\lim_{d\to\infty}\frac{(aq;q)_\infty}{(aq/d;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}aq/bc,d\\ aq/b,aq/c\end{matrix};\frac{aq}{d}\right]\\
&=(aq;q)_\infty{}_1\phi_2\left[\begin{matrix}aq/bc\\ aq/b,aq/c\end{matrix};aq\right]
\end{aligned}
$$

(2.11) 式は、(2.8) 式において、$c\to\infty$ として、

$$
\begin{aligned}
&{}_5\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,d\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/d,-\end{matrix};\frac{a^2q^2}{bd}\right]\\
&=\lim_{c\to\infty}{}_6\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,-\end{matrix};\frac{a^2q^2}{bcd}\right]\\
&=\lim_{c\to\infty}\frac{(aq;q)_\infty}{(aq/d;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}aq/bc,d\\ aq/b,aq/c\end{matrix};\frac{aq}{d}\right]\\
&=\frac{(aq;q)_\infty}{(aq/d;q)_\infty}{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}d\\ aq/b\end{matrix};\frac{aq}{d}\right]
\end{aligned}
$$

$d\mapsto c$ として、式を得る。

(2.12) 式は、(2.9) 式において、$b\to\infty$ として、

$$
\begin{aligned}
&{}_5\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,-\end{matrix};\frac{a^2q^2}{bc}\right]\\
&=\lim_{b\to\infty}{}_6\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,-\end{matrix};\frac{a^2q^2}{bcd}\right]\\
&=\lim_{b\to\infty}\frac{(aq,aq/cd;q)_\infty}{(aq/c,aq/d;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c,d\\ aq/b\end{matrix};\frac{aq}{cd}\right]\\
&=\frac{(aq,aq/cd;q)_\infty}{(aq/c,aq/d;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c,d\\ 0\end{matrix};\frac{aq}{cd}\right]
\end{aligned}
$$

$d\mapsto b$ として、式を得る。 □

系 2.19.

$$
{}_4\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,-\end{matrix};\frac{a^2q^2}{b}\right]=(aq;q)_\infty\,{}_0\phi_1\left[\begin{matrix}-\\ aq/b\end{matrix};aq\right] \tag{2.13}
$$

$$
=\frac{(aq;q)_\infty}{(aq/b;q)_\infty}{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b\\ 0\end{matrix};\frac{aq}{b}\right] \tag{2.14}
$$

証明. (2.13) 式は、(2.10) 式において、$c \to \infty$ として、

$$
\begin{aligned}
&{}_4\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, - \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{b}\right] \\
&= \lim_{c\to\infty} {}_5\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, - \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{bc}\right] \\
&= \lim_{c\to\infty} (aq;q)_\infty\, {}_1\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc \\ aq/b, aq/c \end{matrix}; aq\right] \\
&= (aq;q)_\infty\, {}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ aq/b \end{matrix}; aq\right]
\end{aligned}
$$

(2.14) 式は、(2.12) 式において、$c \to \infty$ として、

$$
\begin{aligned}
&{}_4\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, - \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{b}\right] \\
&= \lim_{c\to\infty} {}_5\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, - \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{bc}\right] \\
&= \lim_{c\to\infty} \frac{(aq, aq/bc;q)_\infty}{(aq/b, aq/c;q)_\infty}\, {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b, c \\ 0 \end{matrix}; \frac{aq}{bc}\right] \\
&= \frac{(aq;q)_\infty}{(aq/b;q)_\infty}\, {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} b \\ 0 \end{matrix}; \frac{aq}{b}\right]
\end{aligned}
$$

□

系 2.20.

$$
{}_3\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, - \end{matrix}; a^2q^2\right] = (aq;q)_\infty\, {}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}; aq\right]
$$

証明. (2.13) 式において、$b \to \infty$ として、

$$
\begin{aligned}
&{}_3\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, - \end{matrix}; a^2q^2\right] \\
&= \lim_{b\to\infty} {}_4\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, - \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{b}\right] \\
&= \lim_{b\to\infty} (aq;q)_\infty\, {}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ aq/b \end{matrix}; aq\right] \\
&= (aq;q)_\infty\, {}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}; aq\right]
\end{aligned}
$$

□

2.4 q-Karlsson-Minton の和公式

補題 2.3.

$$
{}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_{r+1}, cq^n \\ b_1, \ldots, b_r, c \end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a_1, \ldots, a_{r+1}, q^{-n};q)_k}{(b_1, \ldots, b_r, c, q;q)_k} q^{-\binom{k}{2}}(-zq^n)^k\, {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a_1q^k, \ldots, a_{r+1}q^k \\ b_1q^k, \ldots, b_rq^k \end{matrix}; zq^{n-k}\right]
$$

証明. q-Vandermonde の恒等式より、

$$
\frac{(cq^n;q)_k}{(c;q)_k} = q^{nk}\, {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{-k} \\ c \end{matrix}; q\right]
$$

これをもちいて、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_{r+1},cq^n\\ b_1,\dots,b_r,c\end{matrix};z\right]\\
&=\sum_{k\geq 0}\frac{(a_1,\dots,a_{r+1};q)_k}{(b_1,\dots,b_r,q;q)_k}z^k\frac{(cq^n;q)_k}{(c;q)_k}\\
&=\sum_{k\geq 0}\frac{(a_1,\dots,a_{r+1};q)_k}{(b_1,\dots,b_r,q;q)_k}z^kq^{nk}\sum_{j\geq 0}\frac{(q^{-n},q^{-k};q)_j}{(c,q;q)_j}q^j\\
&=\sum_{j,k\geq 0}\frac{(a_1,\dots,a_{r+1};q)_k}{(b_1,\dots,b_r;q)_k}z^kq^{nk}\frac{(q^{-n};q)_j}{(c,q;q)_j}\frac{(-1)^j}{(q;q)_{k-j}}q^{\binom{j}{2}-kj}q^j\\
&=\sum_{j,k\geq 0}\frac{(q^{-n};q)_j}{(c,q;q)_j}(-1)^jq^{\binom{j}{2}+j}\frac{(a_1,\dots,a_{r+1};q)_{j+k}}{(b_1,\dots,b_r;q)_{j+k}(q;q)_k}z^{j+k}q^{n(j+k)}q^{-j(j+k)}\\
&=\sum_{j,k\geq 0}\frac{(a_1,\dots,a_{r+1},q^{-n};q)_j}{(b_1,\dots,b_r,c,q;q)_j}q^{-\binom{j}{2}}(-zq^j)^j\frac{(a_1q^j,\dots,a_{r+1}q^j;q)_k}{(b_1q^j,\dots,b_rq^j,q;q)_k}z^kq^{(n-j)k}\\
&=\sum_{j\geq 0}\frac{(a_1,\dots,a_{r+1},q^{-n};q)_j}{(b_1,\dots,b_r,c,q;q)_j}q^{-\binom{j}{2}}(-zq^j)^j{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_1q^j,\dots,a_{r+1}q^j\\ b_1q^j,\dots,b_rq^j\end{matrix};zq^{n-j}\right]
\end{aligned}
$$

$j\mapsto k$ として補題を得る。 □

定理 2.23. q-Karlsson-Minton の和公式

$$
{}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix}a,b,c_1q^{m_1},\dots,c_rq^{m_r}\\ bq,c_1,\dots,c_r\end{matrix};\frac{q^{1-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right]=\frac{(q,bq/a;q)_\infty}{(q/a,bq;q)_\infty}\prod_{k=1}^{r}\frac{(c_k/b;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}}b^{m_k}
$$

証明. $r=0$ のとき、Heine の和公式より、

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\ bq\end{matrix};\frac{q}{a}\right]=\frac{(q,bq/a;q)_\infty}{(q/a,bq;q)_\infty}
$$

$r\geq 1$ とする。$r-1$ のとき成立するとして、数学的帰納法により示す。補題 2.3 より、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix}a,b,c_1q^{m_1},\dots,c_rq^{m_r}\\ bq,c_1,\dots,c_r\end{matrix};\frac{q^{1-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right]\\
&=\sum_{k=0}^{m_r}\frac{(a,b,c_1q^{m_1},\dots,c_{r-1}q^{m_{r-1}},q^{-m_r};q)_k}{(bq,c_1,\dots,c_r,q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}\left(-\frac{q^{1-m_1-\cdots-m_{r-1}}}{a}\right)^k\\
&\times{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}aq^k,bq^k,c_1q^{m_1+k}\dots,c_{r-1}q^{m_{r-1}+k}\\ bq^{1+k},c_1q^k,\dots,c_{r-1}q^k\end{matrix};\frac{q^{1-m_1-\cdots-m_{r-1}-k}}{a}\right]
\end{aligned}
$$

帰納法の仮定より、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}aq^k,bq^k,c_1q^{m_1+k}\dots,c_{r-1}q^{m_{r-1}+k}\\ bq^{1+k},c_1q^k,\dots,c_{r-1}q^k\end{matrix};\frac{q^{1-m_1-\cdots-m_{r-1}-k}}{a}\right]\\
&=\frac{(q,bq/a;q)_\infty}{(q^{1-k}/a,bq^{1+k};q)_\infty}\prod_{j=1}^{r-1}\frac{(c_j/b;q)_{m_j}}{(c_jq^k;q)_{m_j}}b^{m_j}
\end{aligned}
$$

よって、

$$\sum_{k=0}^{m_r}\frac{(a,b,c_1q^{m_1},\ldots,c_{r-1}q^{m_{r-1}},q^{-m_r};q)_k}{(bq,c_1,\ldots,c_r,q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}\left(-\frac{q^{1-m_1-\cdots-m_{r-1}}}{a}\right)^k$$

$$\times\ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}aq^k,bq^k,c_1q^{m_1+k}\ldots,c_{r-1}q^{m_{r-1}+k}\\ bq^{1+k},c_1q^k,\ldots,c_{r-1}q^k\end{matrix};\frac{q^{1-m_1-\cdots-m_{r-1}-k}}{a}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{m_r}\frac{(a,b,c_1q^{m_1},\ldots,c_{r-1}q^{m_{r-1}},q^{-m_r};q)_k}{(bq,c_1,\ldots,c_r,q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}\left(-\frac{q^{1-m_1-\cdots-m_{r-1}}}{a}\right)^k$$

$$\times\frac{(q,bq/a;q)_\infty}{(q^{1-k}/a,bq^{1+k};q)_\infty}\prod_{j=1}^{r-1}\frac{(c_j/b;q)_{m_j}}{(c_jq^k;q)_{m_j}}(bq^k)^{m_j}$$

$$=\frac{(q,bq/a;q)_\infty}{(q/a,bq;q)_\infty}\sum_{k=0}^{m_r}\frac{(a,b,c_1q^{m_1},\ldots,c_{r-1}q^{m_{r-1}},q^{-m_r};q)_k}{(bq,c_r,q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}\left(-\frac{q}{a}\right)^k$$

$$\times(q/a;q)_{-k}(bq;q)_k\prod_{j=1}^{r-1}\frac{(c_j/b;q)_{m_j}}{(c_j;q)_{m_j+k}}b^{m_j}$$

$$=\frac{(q,bq/a;q)_\infty}{(q/a,bq;q)_\infty}\prod_{j=1}^{r-1}\frac{(c_j/b;q)_{m_j}}{(c_j;q)_{m_j}}b^{m_j}\sum_{k=0}^{m_r}\frac{(a,b,q^{-m_r};q)_k}{(c_r,q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}\left(-\frac{q}{a}\right)^k$$

$$\times\frac{(-a)^kq^{\binom{k}{2}}}{(a;q)_k}$$

$$=\frac{(q,bq/a;q)_\infty}{(q/a,bq;q)_\infty}\prod_{j=1}^{r-1}\frac{(c_j/b;q)_{m_j}}{(c_j;q)_{m_j}}b^{m_j}\sum_{k=0}^{m_r}\frac{(b,q^{-m_r};q)_k}{(c_r,q;q)_k}q^k$$

$$=\frac{(q,bq/a;q)_\infty}{(q/a,bq;q)_\infty}\prod_{j=1}^{r-1}\frac{(c_j/b;q)_{m_j}}{(c_j;q)_{m_j}}b^{m_j}\frac{(c_r/b;q)_{m_r}}{(c_r;q)_{m_r}}b^{m_r}$$

$$=\frac{(q,bq/a;q)_\infty}{(q/a,bq;q)_\infty}\prod_{j=1}^{r}\frac{(c_j/b;q)_{m_j}}{(c_j;q)_{m_j}}b^{m_j}$$

□

これは Karlsson-Minton の和公式、$\sum_{k=1}^r m_k<1+a$ のとき、

$${}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}-a,b,c_1+m_1,\ldots,c_r+m_r\\ 1+b,c_1,\ldots,c_r\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)}\prod_{k=1}^r\frac{(c_k-b)_{m_k}}{(c_k)_{m_k}}$$

の q 類似になっている。

定理 2.24.

$${}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a,c_1q^{m_1},\ldots,c_rq^{m_r}\\ c_1,\ldots,c_r\end{matrix};\frac{q^{-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right]=0,\quad\left|\frac{q^{-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right|<1$$

証明. q-Karlsson-Minton の和公式において、$b \mapsto bq^{-n}$ とおいて、$n \to \infty$ として、

$$\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r\end{matrix}; \frac{q^{-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix}a, bq^{-n}, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ bq^{1-n}, c_1, \dots, c_r\end{matrix}; \frac{q^{1-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(q, bq^{1-n}/a; q)_\infty}{(q/a, bq^{1-n}; q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_kq^n/b; q)_{m_k}}{(c_k; q)_{m_k}} b^{m_k} q^{-nm_k} \\
&= \frac{(q, bq/a; q)_\infty}{(q/a, bq; q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{(c_k; q)_{m_k}} b^{m_k} \lim_{n\to\infty} \frac{(bq; q)_{-n}}{(bq/a; q)_{-n}} q^{-n(m_1+\cdots+m_r)}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(bq; q)_{-n}}{(bq/a; q)_{-n}} q^{-n(m_1+\cdots+m_r)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(a/b; q)_n}{(1/b; q)_n} \frac{(-1/b)^n}{(-a/b)^n} q^{-n(m_1+\cdots+m_r)} \\
&= \frac{(a/b; q)_\infty}{(1/b; q)_\infty} \lim_{n\to\infty} (q^{-m_1-\cdots-m_r}/a)^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

であるから、定理を得る。 □

定理 2.25.

$$ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}q^{-m_1-\cdots-m_r}, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r\end{matrix}; 1\right] = \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r} q^{-\binom{1+m_1+\cdots+m_r}{2}} (q; q)_{m_1+\cdots+m_r}}{(c_1; q)_{m_1} \cdots (c_r; q)_{m_r}} $$

証明. 途中まで、定理 2.24 の証明と同様にして、$a = q^{-m_1-\cdots-m_r}$ とすると、

$$\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}q^{-m_1-\cdots-m_r}, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r\end{matrix}; 1\right] \\
&= \frac{(q, bq/a; q)_\infty}{(q/a, bq; q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b; q)_{m_k}}{(c_k; q)_{m_k}} b^{m_k} \frac{(a/b; q)_\infty}{(1/b; q)_\infty} \lim_{n\to\infty} (q^{-m_1-\cdots-m_r}/a)^n \\
&= \frac{(q, bq^{1+m_1+\cdots+m_r}, q^{-m_1-\cdots-m_r}/b; q)_\infty}{(q^{1+m_1+\cdots+m_r}, bq, 1/b; q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{(c_k; q)_{m_k}} b^{m_k} \\
&= \frac{(q; q)_{m_1+\cdots+m_r}}{(bq; q)_{m_1+\cdots+m_r} (1/b; q)_{-m_1-\cdots-m_r}} \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{(c_k; q)_{m_k}} b^{m_k} \\
&= \frac{(q; q)_{m_1+\cdots+m_r}}{(-bq)^{m_1+\cdots+m_r} q^{\binom{m_1+\cdots+m_r}{2}}} \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{(c_k; q)_{m_k}} b^{m_k} \\
&= \frac{(-1)^{m_1+\cdots+m_r} q^{-\binom{1+m_1+\cdots+m_r}{2}} (q; q)_{m_1+\cdots+m_r}}{(c_1; q)_{m_1} \cdots (c_r; q)_{m_r}}
\end{aligned}$$

□

定理 2.26.

$$ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r\end{matrix}; q^{1-m_1-\cdots-m_r}/a\right] = \frac{(q; q)_\infty}{(q/a; q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{q^{\binom{m_k}{2}} (-c_k)^{m_k}}{(c_k; q)_{m_k}} $$

証明. q-Karlsson-Minton の和公式において、$b \to 0$ として、

$$\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a, c_1 q^{m_1}, \dots, c_r q^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r \end{matrix}; q^{1-m_1-\cdots-m_r}/a\right] \\
&= \lim_{b\to 0} {}_{r+2}\phi_{r+1} \left[\begin{matrix} a, b, c_1 q^{m_1}, \dots, c_r q^{m_r} \\ bq, c_1, \dots, c_r \end{matrix}; \frac{q^{1-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right] \\
&= \lim_{b\to 0} \frac{(q, bq/a; q)_\infty}{(q/a, bq; q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b; q)_{m_k}}{(c_k; q)_{m_k}} b^{m_k} \\
&= \frac{(q;q)_\infty}{(q/a;q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{q^{\binom{m_k}{2}} (-c_k)^{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}}
\end{aligned}$$

□

定理 2.27.

$$ {}_{r+2}\phi_{r+1} \left[\begin{matrix} q^{-n}, b, c_1 q^{m_1}, \dots, c_r q^{m_r} \\ bq, c_1, \dots, c_r \end{matrix}; q\right] = \frac{(q;q)_n b^n}{(bq;q)_n} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b_k; q)_{m_k}}{(c_k; q)_{m_k}} $$

証明. q-Karlsson-Minton の和公式において、$a \to q^{-n}$ として、定理 1.11 をもちいて、

$$\begin{aligned}
&\frac{(q, bq^{1+n}; q)_\infty}{(q^{1+n}, bq; q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b; q)_{m_k}}{(c_k; q)_{m_k}} b^{m_k} \\
&= {}_{r+2}\phi_{r+1} \left[\begin{matrix} q^{-n}, b, c_1 q^{m_1}, \dots, c_r q^{m_r} \\ bq, c_1, \dots, c_r \end{matrix}; q^{1-m_1-\cdots-m_r+n}\right] \\
&= \frac{(b, c_1 q^{m_1}, \dots, c_r q^{m_r}; q)_n}{(bq, c_1, \dots, c_r; q)_n} q^{-\binom{n}{2}} \left(-q^{-m_1-\cdots-m_r+n}\right)^n {}_{r+2}\phi_{r+1} \left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{-n}/b, q^{1-n}/c_1, \dots, q^{1-n}/c_r \\ q^{1-n}/b, q^{1-n-m_1}/c_1, \dots, q^{1-n-m_r}/c_r \end{matrix}; q\right]
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
&{}_{r+2}\phi_{r+1} \left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{-n}/b, q^{1-n}/c_1, \dots, q^{1-n}/c_r \\ q^{1-n}/b, q^{1-n-m_1}/c_1, \dots, q^{1-n-m_r}/c_r \end{matrix}; q\right] \\
&= \frac{(q, bq^{1+n}; q)_\infty}{(q^{1+n}, bq; q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b; q)_{m_k}}{(c_k; q)_{m_k}} b^{m_k} \frac{(bq, c_1, \dots, c_r; q)_n}{(b, c_1 q^{m_1}, \dots, c_r q^{m_r}; q)_n} q^{\binom{n}{2}} \left(-q^{m_1+\cdots+m_r-n}\right)^n \\
&= \frac{(q, c_1, \dots, c_r; q)_n}{(bq;q)_n} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b; q)_{m_k}}{(c_k; q)_{m_k+n}} b^{m_k} \times \frac{(bq;q)_n}{(b;q)_n} q^{\binom{n}{2}} \left(-q^{m_1+\cdots+m_r-n}\right)^n \\
&= \frac{(q;q)_n}{(b;q)_n} q^{\binom{n}{2}} \left(-q^{m_1+\cdots+m_r-n}\right)^n \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b; q)_{m_k}}{(c_k q^n; q)_{m_k}} b^{m_k}
\end{aligned}$$

ここで、$b \to q^{-n}/b$, $c_i \to q^{1-n-m_i}/c_i$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} q^{-n}, b, c_1q^{m_1}, \ldots, c_rq^{m_r} \\ bq, c_1, \ldots, c_r \end{matrix}; q\right] \\
&= \frac{(q;q)_n}{(q^{-n}/b;q)_n} q^{\binom{n}{2}} \left(-q^{m_1+\cdots+m_r-n}\right)^n \prod_{k=1}^{r} \frac{(bq^{1-m_k}/c_k;q)_{m_k}}{(q^{1-m_k}/c_k;q)_{m_k}} (q^{-n}/b)^{m_k} \\
&= \frac{(q;q)_n(-bq)^n q^{\binom{n}{2}}}{(bq;q)_n} q^{\binom{n}{2}} (-q^{-n})^n \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}} \\
&= \frac{(q;q)_n b^n}{(bq;q)_n} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}}
\end{aligned}
$$

となって、定理を得る。 □

定理 2.28.

$$
{}_{r+1}\phi_{r}\left[\begin{matrix} q^{-n}, c_1q^{m_1}, \ldots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \ldots, c_r \end{matrix}; q\right] = 0, \quad n > m_1 + \cdots + m_r
$$

証明. 定理 2.27 のおいて、$b \to 0$ として、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_{r}\left[\begin{matrix} q^{-n}, c_1q^{m_1}, \ldots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \ldots, c_r \end{matrix}; q\right] \\
&= \lim_{b\to 0} {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} q^{-n}, b, c_1q^{m_1}, \ldots, c_rq^{m_r} \\ bq, c_1, \ldots, c_r \end{matrix}; q\right] \\
&= \lim_{b\to 0} \frac{(q;q)_n b^n}{(bq;q)_n} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}}
\end{aligned}
$$

これは、$n > m_1 + \cdots + m_r$ より、0 に収束する。 □

定理 2.29.

$$
{}_{r+1}\phi_{r}\left[\begin{matrix} q^{-n}, c_1q^{m_1}, \ldots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \ldots, c_r \end{matrix}; 1\right] = \frac{(-1)^n (q;q)_n q^{-\binom{1+n}{2}}}{(c_1;q)_{m_1} \cdots (c_r;q)_{m_r}}, \quad n \geq m_1 + \cdots m_r
$$

証明. 定理 2.27 のおいて、$b \to \infty$ として、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_{r}\left[\begin{matrix} q^{-n}, c_1q^{m_1}, \ldots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \ldots, c_r \end{matrix}; 1\right] \\
&= \lim_{b\to \infty} {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} q^{-n}, b, c_1q^{m_1}, \ldots, c_rq^{m_r} \\ bq, c_1, \ldots, c_r \end{matrix}; q\right] \\
&= \lim_{b\to \infty} \frac{(q;q)_n b^n}{(bq;q)_n} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}} \\
&= (-1)^n (q;q)_n q^{-\binom{1+n}{2}} \prod_{k=0}^{r} \frac{1}{(c;q)_{m_k}} \\
&= \frac{(-1)^n (q;q)_n q^{-\binom{1+n}{2}}}{(c_1;q)_{m_1} \cdots (c_r;q)_{m_r}}
\end{aligned}
$$

□

定理 2.30.

$$
{}_{r+1}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} b, c_1 q^{m_1}, \ldots, c_r q^{m_r} \\ bq, c_1, \ldots, c_r \end{matrix} ; q^{1-m_1-\cdots-m_r}\right] = \frac{(q;q)_\infty}{(bq;q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b_k;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}} b^{m_k}
$$

証明. q-Karlsson-Minton の和公式において、$a \to \infty$ として、

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} b, c_1 q^{m_1}, \ldots, c_r q^{m_r} \\ bq, c_1, \ldots, c_r \end{matrix} ; q^{1-m_1-\cdots-m_r}\right] \\
&= \lim_{a\to\infty} {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} a, b, c_1 q^{m_1}, \ldots, c_r q^{m_r} \\ bq, c_1, \ldots, c_r \end{matrix} ; \frac{q^{1-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right] \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{(q, bq/a;q)_\infty}{(q/a, bq;q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}} b^{m_k} \\
&= \frac{(q;q)_\infty}{(bq;q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b_k;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}} b^{m_k}
\end{aligned}
$$

□

第 3 章

Bilateral q 超幾何級数

3.1 Jacobi の三重積

Jacobi の三重積は重要な式で、テータ関数を扱うときに、よく用いることができるだろう。

定理 3.1. Jacobi の三重積

$$(q, z, q/z; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n$$

証明. q 二項定理より、

$$\begin{aligned}
(z, q/z; q)_\infty &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n} z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{\binom{m}{2}}}{(q;q)_m} (q/z)^m \\
&= \sum_{n,m\geq 0} \frac{(-1)^{n+m} q^{\binom{n}{2}+\binom{m}{2}+m}}{(q;q)_n (q;q)_m} z^{n-m} \\
&= \sum_{m\geq 0,\, n\geq -m} \frac{(-1)^n q^{\binom{n+m}{2}+\binom{m}{2}+m}}{(q;q)_{n+m}(q;q)_m} z^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^n \sum_{m\geq -n} \frac{q^{\binom{n+m}{2}+\binom{m}{2}+m}}{(q;q)_{n+m}(q;q)_m} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n \sum_{m\geq -n} \frac{q^{2\binom{m}{2}+m(n+1)}}{(q;q)_{n+m}(q;q)_m}
\end{aligned}$$

さて、$n \geq 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\geq -n} \frac{q^{2\binom{m}{2}+m(n+1)}}{(q;q)_{n+m}(q;q)_m} \\
&= \frac{1}{(q;q)_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2\binom{m}{2}+m(n+1)}}{(q^{1+n};q)_m (q;q)_m} \\
&= \frac{1}{(q;q)_n} {}_0\phi_1 \left[\begin{matrix} - \\ q^{1+n} \end{matrix} ; q^{1+n} \right]
\end{aligned}$$

系 2.4

$$ {}_0\phi_1 \left[\begin{matrix} - \\ z \end{matrix} ; z \right] = \frac{1}{(z;q)_\infty} $$

より、

$$ \begin{aligned} \frac{1}{(q;q)_n} {}_0\phi_1 \left[\begin{matrix} - \\ q^{1+n} \end{matrix} ; q^{1+n} \right] &= \frac{1}{(q;q)_n} \frac{1}{(q^{1+n};q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty} \end{aligned} $$

また、$n \leq 0$ のとき、同様に系 2.4 を用いて、

$$ \begin{aligned} &\sum_{m \geq -n} \frac{q^{2\binom{m}{2}+m(n+1)}}{(q;q)_{n+m}(q;q)_m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2\binom{m-n}{2}+(m-n)(n+1)}}{(q;q)_{m-n}(q;q)_m} \\ &= \frac{1}{(q;q)_{-n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2\binom{m}{2}+2\binom{-n}{2}-2mn-n^2-n+mn+m}}{(q^{1-n};q)_m(q;q)_m} \\ &= \frac{1}{(q;q)_{-n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2\binom{m}{2}+m(-n+1)}}{(q^{1-n};q)_m(q;q)_m} \\ &= \frac{1}{(q;q)_{-n}} {}_0\phi_1 \left[\begin{matrix} - \\ q^{1-n} \end{matrix} ; q^{1-n} \right] \\ &= \frac{1}{(q;q)_{-n}} \frac{1}{(q^{1-n};q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty} \end{aligned} $$

よって、

$$ \sum_{m \geq -n} \frac{q^{2\binom{m}{2}+m(n+1)}}{(q;q)_{n+m}(q;q)_m} = \frac{1}{(q;q)_\infty} $$

であるから、

$$ (z, q/z; q)_\infty = \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n $$

つまり、

$$ (q, z, q/z; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n $$

□

Jacobi の三重積は、次の形のほうが美しいと思う人も多いのではないだろうか。

定理 3.2.

$$ (q^2, -zq, -q/z; q^2)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n $$

証明. 定理 3.1 において、$q \to q^2$, $z \to -zq$ とすればよい。 □

系 3.1.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = (q^2, -q, -q; q^2)_\infty$$

証明. 定理 3.2 において、$z = 1$ とすればよい。 □

次はよく知られた定理である。

定理 3.3. Euler の五角数定理

$$(q;q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2}$$

証明. Jacobi の三重積において、$q \to q^3$, $z \to q^2$ として、

$$\begin{aligned}
(q;q)_\infty &= (q, q^2, q^3; q^3)_\infty \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{3\binom{n}{2}} + 2n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2}
\end{aligned}$$

□

Jacobi の三重積を用いて、次のように三乗の級数展開も求めることができるのである。

系 3.2.

$$(q;q)_\infty^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) q^{\binom{n}{2}}$$

証明. Jacobi の三重積より、

$$\begin{aligned}
(q;q)_\infty^3 &= \lim_{z\to 1} (q, zq, q/z; q)_\infty \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{1}{1-z} (q, z, q/z; q)_\infty \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{1}{1-z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{1}{1-z} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{1-n} q^{\binom{1-n}{2}} z^{1-n} \right) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{1}{1-z} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^{1-n} \right) \\
&= \lim_{z\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{z^n - z^{1-n}}{1-z} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) q^{\binom{n}{2}}
\end{aligned}$$

□

次の等式も美しい形をしている。

系 3.3.

$$\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}q^{\binom{n}{2}}$$

証明. Euler の恒等式

$$(q;q^2)_\infty=\frac{1}{(-q;q)_\infty}$$

と Jacobi の三重積により、

$$\begin{aligned}\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}&=(q,-q,-q;q)_\infty\\&=\frac{1}{2}(q,-1,-q;q)_\infty\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{\binom{n}{2}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}q^{\binom{n}{2}}\end{aligned}$$

□

次は非常に美しい等式である。

定理 3.4. Rogers-Ramanujan の恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}\tag{3.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}\tag{3.2}$$

証明. 系 2.20 より、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}a^n&={}_0\phi_1\left[\begin{matrix}-\\0\end{matrix};aq\right]\\&=\frac{1}{(aq;q)_\infty}{}_3\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q\\\sqrt{a},-\sqrt{a},-\end{matrix};aq\right]\\&=\frac{1}{(aq;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nq^{5\binom{n}{2}}(1-aq^{2n})(a;q)_n}{(1-a)(q;q)_n}(a^2q^2)^n\end{aligned}$$

ここで、$a \to 1$ として、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} &= \lim_{a\to 1} \frac{1}{(aq;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{5\binom{n}{2}}(1-aq^{2n})(a;q)_n}{(1-a)(q;q)_n}(a^2q^2)^n \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{5\binom{n}{2}}(1-q^{2n})(q;q)_{n-1}}{(q;q)_n}q^{2n}\right) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{5\binom{n}{2}}(1+q^n)q^{2n}\right) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{5\binom{n}{2}}q^{2n}+\sum_{n=1}(-1)^n q^{5\binom{n}{2}}q^{3n}\right) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{5\binom{n}{2}+2n} \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}(q^2,q^3,q^5;q^5)_\infty \\
&= \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}
\end{aligned}$$

また、$a \to q$ として、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} &= \frac{1}{(q^2;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{5\binom{n}{2}}(1-q^{2n+1})}{1-q}q^{4n} \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{5\binom{n}{2}}(1-q^{2n+1})q^{4n} \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\left(\sum n=0^{\infty}(-1)^n q^{5\binom{n}{2}+4n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{5\binom{n}{2}+6n+1}\right) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\left(\sum n=0^{\infty}(-1)^n q^{5\binom{n}{2}+4n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{-1-n}q^{5\binom{-1-n}{2}+4(-1-n)}\right) \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{5\binom{n}{2}+4n} \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty}(q,q^4,q^5;q^5)_\infty \\
&= \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}
\end{aligned}$$

□

3.2 Ramanujan の和公式

Bilateral q 超幾何級数を以下のように定義する。

定義 3.1. Bilateral q 超幾何級数の定義

$$ {}_r\psi_r\left[\begin{matrix}a_1,\cdots,a_r\\ b_1,\cdots,b_r\end{matrix};q;z\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r;q)_n}{(b_1,\ldots,b_r;q)_n}z^n $$

特に底が q の場合は省略して、

$$
{}_r\psi_r\left[\begin{matrix}a_1,\cdots,a_r\\b_1,\cdots,b_r\end{matrix};z\right]={}_r\psi_r\left[\begin{matrix}a_1,\cdots,a_r\\b_1,\cdots,b_r\end{matrix};q;z\right]
$$

と表す。

定理 3.5. Ramanujan の和公式

$$
{}_1\psi_1\left[\begin{matrix}a\\c\end{matrix};z\right]=\frac{(az,q,c/a,q/az;q)_\infty}{(z,c,q/a,c/az;q)_\infty}
$$

証明. Heine の和公式、

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{c}{ab}\right]=\frac{(c/a,c/b;q)_\infty}{(c,c/ab;q)_\infty}
$$

において、$a\to aq^{-N}$, $c\to cq^{-N}$ として、

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(aq^{-N},b;q)_n}{(cq^{-N},q;q)_n}\left(\frac{c}{ab}\right)^n=\frac{(c/a,cq^{-N}/b;q)_\infty}{(cq^{-N},c/ab;q)_\infty}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(aq^{-N},b;q)_n}{(cq^{-N},q;q)_n}\left(\frac{c}{ab}\right)^n&=\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(aq^{-N},b;q)_{n+N}}{(cq^{-N},q;q)_{n+N}}\left(\frac{c}{ab}\right)^{n+N}\\
&=\frac{(aq^{-N},b;q)_N}{(cq^{-N},q;q)_N}\left(\frac{c}{ab}\right)^N\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(a,bq^N;q)_n}{(c,q^{1+N};q)_n}\left(\frac{c}{ab}\right)^n
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(c;q)_n}\left(\frac{c}{ab}\right)^n&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(a,bq^N;q)_n}{(c,q^{1+N};q)_n}\left(\frac{c}{ab}\right)^n\\
&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{ab}{c}\right)^N\frac{(cq^{-N},q;q)_N}{(aq^{-N},b;q)_N}\frac{(cq^{-N}/b,c/a;q)_\infty}{(cq^{-N},c/ab;q)_\infty}\\
&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{ab}{c}\right)^N\frac{(cq^{-N}/b;q)_N}{(aq^{-N};q)_N}\frac{(c/a,c/b,q;q)_\infty}{(b,c,c/ab;q)_\infty}\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{(bq/c;q)_N}{(q/a;q)_N}\frac{(c/a,c/b,q;q)_\infty}{(b,c,c/ab;q)_\infty}\\
&=\frac{(bq/c,c/a,c/b,q;q)_\infty}{(q/a,b,c,c/ab;q)_\infty}
\end{aligned}
$$

つまり、

$$
{}_1\psi_1\left[\begin{matrix}a\\c\end{matrix};\frac{c}{ab}\right]=\frac{(bq/c,c/a,c/b,q;q)_\infty}{(q/a,b,c,c/ab;q)_\infty}
$$

である。ここで、$b\to c/az$ として、

$$
{}_1\psi_1\left[\begin{matrix}a\\c\end{matrix};z\right]=\frac{(az,q,c/a,q/az;q)_\infty}{(z,c,q/a,c/az;q)_\infty}
$$

を得る。 □

系 3.4.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{1-aq^n}=\frac{(q,q,az,q/az;q)_\infty}{(a,q/a,z,q/z;q)_\infty}$$

証明. Ramanujan の和公式より、

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{1-aq^n}&=\frac{1}{1-a}{}_1\psi_1\left[\begin{matrix}a\\aq\end{matrix};z\right]\\&=\frac{1}{1-a}\frac{(q,q,az,q/az;q)_\infty}{(aq,q/a,z,q/z;q)_\infty}\\&=\frac{(q,q,az,q/az;q)_\infty}{(a,q/a,z,q/z;q)_\infty}\end{aligned}$$

□

系 3.5.

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}\right)^2=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}$$

証明. 系 3.4 において、$q\to q^2, z\to q, a\to -1$ として、

$$\begin{aligned}2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}&=2\frac{(q^2,q^2,-q,-q;q^2)_\infty}{(-1,-q^2,q,q;q^2)_\infty}\\&=\frac{(q^2,q^2,-q,-q;q^2)_\infty}{(-q^2,-q^2,q,q;q^2)_\infty}\\&=\frac{(q^2,q^2,-q,-q;q^2)_\infty(-q,-q;q)_\infty}{(-q^2,-q^2;q^2)_\infty}\\&=(q^2,q^2,-q,-q;q^2)_\infty(-q,-q;q^2)_\infty\\&=(q^2,-q,-q;q^2)_\infty^2\end{aligned}$$

Jacobi の三重積より、

$$(q^2,-q,-q;q^2)_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}$$

であるから、式を得る。 □

これを用いて、次の定理を示すことができる。

定理 3.6. Jacobi の二平方和定理
n を自然数のとき、$n=a^2+b^2$ を満たす整数の組 (a,b) の個数を $r_2(n)$ とすると、

$$r_2(n)=4\sum_{2\nmid d|n}(-1)^{(d-1)/2}$$

証明. 系 3.5 より、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} r_2(n)q^n &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} q^{n^2+m^2} \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 \\
&= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \\
&= 1+4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \\
&= 1+4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{n(2m+1)} \\
&= 1+4\sum_{j=0}^{\infty} q^j \sum_{n(2m+1)=j}(-1)^m \\
&= 1+4\sum_{j=0}^{\infty} q^j \sum_{2\nmid d|j}(-1)^{(d-1)/2}
\end{aligned}$$

よって、q の係数を比較して、

$$r_2(n) = 4\sum_{2\nmid d|n}(-1)^{(d-1)/2}$$

を得る。

□

おわりに

q 超幾何級数には興味深い等式が多いと思う。ここに書いたことはその基本的な部分で、より深い結果についてはまた書きたいと思っている。

参考文献

[1] W.N. Bailey - Generalized hypergeometric series, Cambridge University Press, 1935

[2] Bruce C. Berndt - Ramanujan's Notebooks Part II Springer-Verlag New York 1989

[3] Slater L.J. - Generalized hypergeometric functions-Cambridge 1966

[4] George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy - Special functions-Cambridge University Press 1999

[5] George Gasper, Mizan Rahman - Basic hypergeometric series