q 超幾何級数の定理集

@nkswtr

はじめに

この PDF は q 超幾何級数の定理を参照用にまとめたものである。

目次

第 1 章

q 類似の導入

1.1　基本的な q 類似

定義 1.1. q 数の定義

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}$$

定義 1.2. q ポッホハマー記号の定義

$$(a;q)_0 = 1, \quad (a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), \quad (a;q)_{-n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1-aq^{-k})}$$

　また、$n \to \infty$ として、

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$$

と定義する。

定理 1.1.

$$(a;q)_n = (-a)^n q^{\binom{n}{2}} (q^{1-n}/a;q)_n \tag{1.1}$$

$$(a;q)_{-n} = \frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q/a;q)_n} \tag{1.2}$$

$$(a;q)_{n+k} = (a;q)_n (aq^n;q)_k \tag{1.3}$$

$$(a;q)_{n-k} = \frac{(a;q)_n}{(q^{1-n}/a;q)_k} (-q/a)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \tag{1.4}$$

$$(q^{-n};q)_k = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}} (-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \tag{1.5}$$

$$(a,-a;q)_n = (a^2;q^2)_n \tag{1.6}$$

$$(a;q)_{2n} = (a,aq;q^2)_n \tag{1.7}$$

　最後の式は、

$$(a;q)_{mn} = (a,aq,\ldots,aq^{m-1};q^m)_n$$

と一般化でき、特に $n \to \infty$ として、

$$(a;q)_\infty = (a,aq,\ldots,aq^{m-1};q^m)_\infty$$

系 1.1.

$$(a;q)_{2n} = (\sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{aq}, -\sqrt{aq}; q)_n \tag{1.8}$$

$$\frac{(\sqrt{a}q, -\sqrt{a}q; q)_n}{(\sqrt{a}, -\sqrt{a}; q)_n} = \frac{1-aq^{2n}}{1-a} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1}\frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} &= \lim_{q\to 1}\frac{1-q^a}{1-q}\frac{1-q^{a+1}}{1-q}\cdots\frac{1-q^{a+n-1}}{1-q}\\ &= a(a+1)\cdots(a+n-1)\\ &= (a)_n\end{aligned}$$

定理 1.2. Euler の恒等式

$$(-q;q)_\infty (q;q^2)_\infty = 1$$

定義 1.3. q 階乗の定義

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n}[k]_q$$

定義 1.4. q 二項係数の定義

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

1.2 q ガンマ関数

定義 1.5. q ガンマ関数の定義

$$\Gamma_q(z) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}(1-q)^{1-z}$$

定理 1.3.

$$\lim_{q\to 1}\Gamma_q(z) = \Gamma(z)$$

定理 1.4.

$$\Gamma_q(nz)\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma_{q^n}\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^{nz-1}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma_{q^n}\left(z+\frac{k}{n}\right)$$

定義 1.6. q ベータ関数の定義

$$B_q(x,y) = \frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)}$$

1.3 q 微分

定義 1.7. q 微分の定義

$$D_q f(z) = \frac{f(z)-f(zq)}{(1-q)z}$$

定理 1.5.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lim_{a\to 0} D_q^n f(a)}{[n]_q!}z^n$$

定理 1.6.

$$(z;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} (-z)^k$$

定理 1.7.

$$(z;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}(-z)^n}{(q;q)_n}$$

定理 1.8.

$$\frac{1}{(z;q)_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}_q z^k$$

定理 1.9.

$$\frac{1}{(z;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n}$$

系 1.2.

$$\frac{1}{(q;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q;q)_n}$$

1.4 q 積分

定義 1.8. q 積分の定義

$$\int_0^a f(x)\,d_qx = (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n \tag{1.10}$$

$$\int_a^b f(x)\,d_qx = \int_0^b f(x)\,d_qx - \int_0^a f(x)\,d_qx \tag{1.11}$$

$$\int_0^\infty f(x)\,d_qx = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n)q^n \tag{1.12}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,d_qx = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} (f(q^n)+f(q^{-n}))q^n \tag{1.13}$$

ag

1.5 q 超幾何級数の定義

定義 1.9.

$${}_r\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};q;z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\ldots,a_r;q)_n}{(b_1,\ldots,b_s;q)_n}\left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{1+s-r} z^n$$

定理 1.10.

$$\begin{aligned}{}_{r+1}\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r,q^{-n}\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};z\right] &= \frac{(a_1,\ldots,a_r;q)_n}{(b_1,\ldots,b_s;q)_n}\left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{s-r-1}\left(\frac{z}{q}\right)^n \\ &\quad\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{1-n}/b_1,\ldots,q^{1-n}/b_s,q^{-n};q)_k}{(q^{1-n}/a_1,\ldots,q^{1-n}/a_r,q;q)_k}\left(\frac{b_1\cdots b_s q^{1+n}}{a_1\cdots a_r z}\right)^k\end{aligned}$$

定理 1.11.

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_r,q^{-n} \\ b_1,\ldots,b_s \end{matrix};z\right] \\
&= \frac{(a_1,\ldots,a_r;q)_n}{(b_1,\ldots,b_s;q)_n} q^{-\binom{n}{2}} \left(-\frac{z}{q}\right)^n {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} q^{1-n}/b_1,\ldots,q^{1-n}/b_r,q^{-n} \\ q^{1-n}/a_1,\ldots,q^{1-n}/a_r \end{matrix};\frac{b_1\cdots b_s q^{1+n}}{a_1\cdots a_r z}\right]
\end{aligned}
$$

第 2 章

q 超幾何級数の変換公式

2.1 Heine の変換公式

定理 2.1. q 二項定理

$$ {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ; z \right] = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} $$

定理 2.2. q ベータ関数の q 積分表示

$$ B_q(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} \frac{(tq;q)_\infty}{(tq^y;q)_\infty} \, d_q t $$

定理 2.3. Heine の変換公式

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; z \right] &= \frac{(b, az;q)_\infty}{(c, z;q)_\infty} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} c/b, z \\ az \end{matrix} ; b \right] && (2.1) \\ &= \frac{(c/b, bz;q)_\infty}{(c, z;q)_\infty} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} abz/c, b \\ bz \end{matrix} ; \frac{c}{b} \right] && (2.2) \\ &= \frac{(abz/c;q)_\infty}{(z;q)_\infty} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} c/a, c/b \\ c \end{matrix} ; \frac{abz}{c} \right] && (2.3) \end{aligned} $$

定理 2.4. Heine の和公式

$$ {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; \frac{c}{ab} \right] = \frac{(c/a, c/b;q)_\infty}{(c, c/ab;q)_\infty} $$

系 2.1.

$$ {}_1\phi_1 \left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} ; \frac{c}{a} \right] = \frac{(c/a;q)_\infty}{(c;q)_\infty} $$

系 2.2.

$$ {}_0\phi_1 \left[\begin{matrix} - \\ z \end{matrix} ; z \right] = \frac{1}{(z;q)_\infty} $$

系 2.3.

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2} = \frac{1}{(q;q)_\infty} $$

定理 2.5. q-Vandermonde の恒等式

$$ {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix} ; \frac{cq^n}{b} \right] = \frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n} \tag{2.4} $$

$$ {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} b, q^{-n} \\ c \end{matrix} ; q \right] = \frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n} b^n \tag{2.5} $$

系 2.4.

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}0, q^{-n}\\ c\end{matrix}; q\right] = \frac{(-c)^n q^{\binom{n}{2}}}{(c;q)_n} $$

系 2.5.

$$ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q \binom{m}{k}_q q^{k^2} = \binom{n+m}{n}_q $$

定理 2.6. Bailey-Daum の和公式

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a, b\\ aq/b\end{matrix}; -\frac{q}{b}\right] = \frac{(-q;q)_\infty (aq, aq^2/b^2; q^2)_\infty}{(aq/b, -q/b; q)_\infty} $$

系 2.6.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, b\\ 1+a-b\end{matrix}; -1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)} $$

系 2.7.

$$ {}_1\phi_1\left[\begin{matrix}a\\ 0\end{matrix}; -q\right] = (-q;q)_\infty (aq;q^2)_\infty $$

定理 2.7. Jackson の ${}_2\phi_2$ 変換公式

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}; z\right] = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} {}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a, c/b\\ c, az\end{matrix}; bz\right] $$

定理 2.8.

$$ {}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a, b\\ c, d\end{matrix}; \frac{cd}{ab}\right] = \frac{(d/a;q)_\infty}{(d;q)_\infty} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a, c/b\\ c\end{matrix}; \frac{d}{a}\right] $$

系 2.8.

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a, 0\\ c\end{matrix}; z\right] = \frac{1}{(z;q)_\infty} {}_1\phi_1\left[\begin{matrix}c/a\\ c\end{matrix}; az\right] $$

系 2.9.

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}0, 0\\ a\end{matrix}; z\right] = \frac{1}{(z;q)_\infty} {}_0\phi_1\left[\begin{matrix}-\\ a\end{matrix}; az\right] $$

系 2.10.

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n^2} = \frac{1}{(z;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2} z^n $$

系 2.11.

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a, 0\\ c\end{matrix}; z\right] = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} {}_1\phi_2\left[\begin{matrix}a\\ c, az\end{matrix}; cz\right] $$

系 2.12.

$$ {}_1\phi_1\left[\begin{matrix}c/a\\ c\end{matrix}; z\right] = (z;q)_\infty {}_1\phi_2\left[\begin{matrix}a\\ c, z\end{matrix}; \frac{cz}{a}\right] $$

系 2.13.

$$ {}_1\phi_1\left[\begin{matrix}0\\ a\end{matrix}; z\right] = (z;q)_\infty {}_0\phi_2\left[\begin{matrix}-\\ a, z\end{matrix}; az\right] $$

系 2.14.

$$ (b;q)_\infty {}_1\phi_1\left[\begin{matrix}b/a\\ b\end{matrix}; c\right] = (c;q)_\infty {}_1\phi_1\left[\begin{matrix}c/a\\ c\end{matrix}; b\right] $$

系 2.15.

$$(b;q)_\infty {}_1\phi_1 \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}; c \end{bmatrix}$$

$$(b;q)_{\infty}\,{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}0\\b\end{matrix};c\right]=(c;q)_{\infty}\,{}_1\phi_1\left[\begin{matrix}0\\c\end{matrix};b\right]$$

定理 2.9.

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,q/a\\c,-q\end{matrix};-c\right]=\frac{(ac,cq/a;q^2)_\infty}{(c;q)_\infty}$$

定理 2.10.

$${}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a,b\\\sqrt{abq},-\sqrt{abq}\end{matrix};-q\right]=\frac{(aq,bq;q^2)_\infty}{(q,abq;q^2)_\infty}$$

定理 2.11.

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\c\end{matrix};z\right]=\frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n}{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}b,bzq^{-n}/c,q^{-n}\\bq^{1-n}/c,0\end{matrix};q\right]$$

定理 2.12.

$$\begin{aligned}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\c\end{matrix};z\right]&=(bzq^{-n}/c;q)_n\,{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}c/b,q^{-n},0\\c,cq/bz\end{matrix};q\right] &(2.6)\\&=\frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n}b^n\,{}_3\phi_1\left[\begin{matrix}b,q/z,q^{-n}\\bq^{1-n}/c\end{matrix};\frac{z}{c}\right] &(2.7)\end{aligned}$$

2.2 Jackson の ${}_8\phi_7$ 和公式

定理 2.13.

$${}_3\phi_2\left[\begin{matrix}a,b,q^{-n}\\c,abq^{1-n}/c\end{matrix};q\right]=\frac{(c/a,c/b;q)_n}{(c,c/ab;q)_n}$$

系 2.16.

$${}_3\phi_2\left[\begin{matrix}aq/bc,aq^n,q^{-n}\\aq/b,aq/c\end{matrix};q\right]=\frac{(b,c;q)_n}{(aq/b,aq/c;q)_n}\left(\frac{aq}{bc}\right)^n$$

定理 2.14.

$$\begin{aligned}&{}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix}a,b,c,a_1,\ldots,a_r,q^{-n}\\aq/b,aq/c,b_1,\ldots,b_{r+1}\end{matrix};z\right]\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(aq/bc,a_1,\ldots,a_r,q^{-n};q)_k(a;q)_{2k}}{(aq/b,aq/c,b_1,\ldots,b_{r+1},q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}\left(-\frac{bcz}{aq}\right)^k{}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix}aq^{2k},a_1q^k,\ldots,a_rq^k,q^{k-n}\\b_1q^k,\ldots,b_{r+1}q^k\end{matrix};\frac{bcz}{aq^{1+k}}\right]\end{aligned}$$

補題 2.1.

$${}_4\phi_3\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,q^{-n}\\\sqrt{a},-\sqrt{a},aq^{1+n}\end{matrix};q^n\right]=\delta_{n,0}$$

補題 2.2.

$${}_6\phi_5\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,q^{-n}\\\sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq^{1+n}\end{matrix};\frac{aq^{1+n}}{bc}\right]$$

定理 2.15. Watson の ${}_8\phi_7$ 変換公式

$$\begin{aligned}&{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\\sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n}\end{matrix};\frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right]\\&=\frac{(aq,aq/de;q)_n}{(aq/d,aq/e;q)_n}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq/bc,d,e,q^{-n}\\aq/b,aq/c,deq^{-n}/a\end{matrix};q\right]\end{aligned}$$

定理 2.16. Jackson の $_8\phi_7$ 和公式
$a^2q^{1+n}=bcde$ であるとき、

$$ {}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n} \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n} \end{matrix};q\right]=\frac{(aq,aq/bc,aq/bd,aq/cd;q)_n}{(aq/b,aq/c,aq/d,aq/bcd;q)_n} $$

定理 2.17.

$$ {}_6\phi_5\left[\begin{matrix} a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d \end{matrix};\frac{aq}{bcd}\right]=\frac{(aq,aq/bc,aq/bd,aq/cd;q)_\infty}{(aq/b,aq/c,aq/d,aq/bcd;q)_\infty} $$

定理 2.18. q-Dixon の恒等式

$$ {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} a,-\sqrt{a}q,b,c \\ -\sqrt{a},aq/b,aq/c \end{matrix};\frac{\sqrt{a}q}{bc}\right]=\frac{(aq,aq/bc,\sqrt{a}q/b,\sqrt{a}q/c;q)_\infty}{(aq/b,aq/c,\sqrt{a}q,\sqrt{a}q/bc;q)_\infty} $$

定理 2.19.

$$ {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} a,\sqrt{a}q,b,c \\ \sqrt{a},aq/b,aq/c \end{matrix};-\frac{\sqrt{a}q}{bc}\right]=\frac{(aq,aq/bc,-\sqrt{a}q/b,-\sqrt{a}q/c;q)_\infty}{(aq/b,aq/c,-\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q/bc;q)_\infty} $$

定理 2.20.

$$ {}_5\phi_5\left[\begin{matrix} a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,0 \end{matrix};\frac{aq}{bc}\right]=\frac{(aq,aq/bc;q)_\infty}{(aq/b,aq/c;q)_\infty} $$

系 2.17.

$$ {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b \end{matrix};\frac{1}{b}\right]=0,\quad |b|>1 $$

2.3 Watson の $_8\phi_7$ 変換公式

以下の公式を用いることで、多くの変換公式を得ることができる。

$$ \begin{aligned} &{}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n} \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n} \end{matrix};\frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right] \\ &=\frac{(aq,aq/de;q)_n}{(aq/d,aq/e;q)_n}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix} aq/bc,d,e,q^{-n} \\ aq/b,aq/c,deq^{-n}/a \end{matrix};q\right] \end{aligned} $$

定理 2.21.

$$ {}_7\phi_7\left[\begin{matrix} a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,0 \end{matrix};\frac{a^2q^2}{bcde}\right]=\frac{(aq,aq/de;q)_\infty}{(aq/d,aq/e;q)_\infty}{}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc,d,e \\ aq/b,aq/c \end{matrix};\frac{aq}{de}\right] $$

系 2.18.

$$ \begin{aligned} {}_6\phi_7\left[\begin{matrix} a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,- \end{matrix};\frac{a^2q^2}{bcd}\right]&=\frac{(aq;q)_\infty}{(aq/d;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc,d \\ aq/b,aq/c \end{matrix};\frac{aq}{d}\right] && (2.8)\\ &=\frac{(aq,aq/cd;q)_\infty}{(aq/c,aq/d;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} c,d \\ aq/b \end{matrix};\frac{aq}{cd}\right] && (2.9) \end{aligned} $$

系 2.19.

$$ \begin{aligned} {}_5\phi_7\left[\begin{matrix} a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,- \end{matrix};\frac{a^2q^2}{bc}\right]&=(aq;q)_\infty\,{}_1\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc \\ aq/b,aq/c \end{matrix};aq\right] && (2.10)\\ &=\frac{(aq;q)_\infty}{(aq/c;q)_\infty}{}_1\phi_1\left[\begin{matrix} c \\ aq/b \end{matrix};\frac{aq}{c}\right] && (2.11)\\ &=\frac{(aq,aq/bc;q)_\infty}{(aq/b,aq/c;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} b,c \\ 0 \end{matrix};\frac{aq}{bc}\right] && (2.12) \end{aligned} $$

系 **2.20.**

$$ {}_4\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, - \end{matrix}; \frac{a^2q^2}{b}\right] = (aq;q)_\infty\, {}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ aq/b \end{matrix}; aq\right] \tag{2.13} $$

$$ = \frac{(aq;q)_\infty}{(aq/b;q)_\infty}\, {}_1\phi_1\left[\begin{matrix} b \\ 0 \end{matrix}; \frac{aq}{b}\right] \tag{2.14} $$

系 **2.21.**

$$ {}_3\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, - \end{matrix}; a^2q^2\right] = (aq;q)_\infty\, {}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}; aq\right] $$

2.4 Karlsson-Minton の和公式の q 類似

補題 **2.3.**

$$ {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_{r+1}, cq^n \\ b_1, \dots, b_r, c \end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a_1, \dots, a_r, q^{-n}; q)_k}{(b_1, \dots, b_r, c, q)_k} q^{-\binom{k}{2}} (-zq^n)^k\, {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a_1q^k, \dots, a_{r+1}q^k \\ b_1q^k, \dots, b_rq^k \end{matrix}; zq^{n-k}\right] $$

定理 **2.22.**

$$ {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} a, b, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ bq, c_1, \dots, c_r \end{matrix}; \frac{q^{1-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right] = \frac{(q, bq/a;q)_\infty}{(q/a, bq;q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}} b^{m_k} $$

定理 **2.23.**

$$ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r \end{matrix}; \frac{q^{-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right] = 0, \quad |q^{-m_1-\cdots-m_r}/a| < 1 $$

定理 **2.24.**

$$ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} q^{-m_1-\cdots-m_r}, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r \end{matrix}; 1\right] = \frac{(-q)^{m_1+\cdots+m_r} q^{-\binom{m_1+\cdots+m_r}{2}} (q;q)_{m_1+\cdots+m_r}}{(c_1;q)_{m_1} \cdots (c_r;q)_{m_r}} $$

定理 **2.25.**

$$ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r \end{matrix}; \frac{q^{1-m_1-\cdots-m_r}}{a}\right] = \frac{(q;q)_\infty}{(q/a;q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{q^{\binom{m_k}{2}}(-c_k)^{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}} $$

定理 **2.26.**

$$ {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} q^{-n}, b, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ bq, c_1, \dots, c_r \end{matrix}; q\right] = \frac{(q;q)_n b^n}{(bq;q)_n} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b_k;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}} $$

定理 **2.27.**

$$ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} q^{-n}, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r \end{matrix}; q\right] = 0, \quad n > m_1 + \cdots m_r $$

定理 **2.28.**

$$ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} q^{-n}, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ c_1, \dots, c_r \end{matrix}; 1\right] = \frac{(-1)^n (q;q)_n q^{-n(n+1)/2}}{(c_1;q)_{m_1} \cdots (c_r;q)_{m_r}}, \quad n \geq m_1 + \cdots m_r $$

定理 **2.29.**

$$ {}_{r+1}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} b, c_1q^{m_1}, \dots, c_rq^{m_r} \\ bq, c_1, \dots, c_r \end{matrix}; q^{1-m_1-\cdots-m_r}\right] = \frac{(q;q)_\infty}{(bq;q)_\infty} \prod_{k=1}^{r} \frac{(c_k/b_k;q)_{m_k}}{(c_k;q)_{m_k}} b^{m_k} $$

第 3 章

Bilateral q 超幾何級数

3.1　Jacobi の三重積

定理 3.1.

$$(q, z, q/z; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n$$

定理 3.2.

$$(q^2, -zq, -q/z; q^2)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n$$

系 3.1.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = (q^2, -q, -q; q^2)_\infty$$

定理 3.3. Euler の五角数定理

$$(q; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2}$$

系 3.2.

$$(q; q)_\infty^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) q^{\binom{n}{2}}$$

系 3.3.

$$\frac{(q^2; q^2)_\infty}{(q; q^2)_\infty} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\binom{n}{2}}$$

定理 3.4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q, q^4; q^5)_\infty} \tag{3.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q^2, q^3; q^5)_\infty} \tag{3.2}$$

3.2 Ramanujan の和公式

定理 3.5. Ramanujan の和公式

$$ {}_1\psi_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}; z \Bigg] = \frac{(az, q, c/a, q/az; q)_\infty}{(z, c, q/a, c/az; q)_\infty} $$

系 3.4.

$$ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{1 - aq^n} = \frac{(q, q, az, q/az; q)_\infty}{(a, q/a, z, q/z; q)_\infty} $$

系 3.5.

$$ \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right)^2 = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} $$

定理 3.6. Jacobi の二平方和定理
n を自然数のとき、$n = a^2 + b^2$ を満たす整数の組 (a, b) の個数を $r_2(n)$ とすると、

$$ r_2(n) = 4 \sum_{2 \nmid d \mid n} (-1)^{(d-1)/2} $$

参考文献

[1] W.N. Bailey - Generalized hypergeometric series, Cambridge University Press, 1935

[2] Bruce C. Berndt - Ramanujan's Notebooks Part II Springer-Verlag New York 1989

[3] Slater L.J. - Generalized hypergeometric functions-Cambridge 1966

[4] George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy - Special functions-Cambridge University Press 1999

[5] George Gasper, Mizan Rahman - Basic hypergeometric series