多重ゼータ値

nkswtr

目次

1 多重ゼータ値の導入

多重ゼータ値は, Riemann ゼータ値

$$\zeta(k) = \sum_{0<n} \frac{1}{n^k}$$

を拡張したものになっている.

1.1 多重ゼータ値の定義

Definition 1.1 (多重ゼータ値)**.** 自然数 $0 < r, 0 < k_1, \cdots, k_r$ に対して, 多重ゼータ値を

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

によって定義し, 多重ゼータスター値を

$$\zeta^\star(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<n_1\leq\cdots\leq n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

によって定義する.

多重ゼータスター値は多重ゼータ値のいくつかの和で表される. 具体例を挙げると

$$\begin{aligned}
\zeta^\star(k_1, k_2) &= \zeta(k_1, k_2) + \zeta(k_1 + k_2) \\
\zeta^\star(k_1, k_2, k_3) &= \zeta(k_1, k_2, k_3) + \zeta(k_1 + k_2, k_3) + \zeta(k_1, k_2 + k_3) + \zeta(k_1 + k_2 + k_3)
\end{aligned}$$

のようになる.

Proposition 1.2. 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ は $1 < k_r$ のとき収束し, $k_r = 1$ のとき発散する.

Proof. $1 < k_r$ とする.

$$\begin{aligned}
\zeta(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} &\leq \sum_{0<n_1,\ldots,n_{r-1}<n_r} \frac{1}{n_1 \cdots n_{r-1}} \frac{1}{n_r^{k_r}} \\
&= \sum_{0<n} \frac{1}{n^{k_r}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right)^{r-1}
\end{aligned}$$

である. $n \to \infty$ において

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \gamma + \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

であり, 任意の $0 \leq m$ において

$$\sum_{0<n} \frac{1}{n^{k_r}} \ln^m n$$

が収束することから, $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ は収束するすることが分かる. $k_r = 1$ のとき,

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{0<n_1<\cdots<n_{r-1}<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_{r-1}^{k_{r-1}} n_r}$$

であり, n に関する数列

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_{r-1}<n} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_{r-1}^{k_{r-1}}}$$

は単調増加で $r \leq n$ において 0 ではないから, $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ は発散する. $\square$

1.2 インデックスと Hoffman 代数

Definition 1.3 (インデックス)**.** 自然数 $0 < r, 0 < k_1,\ldots,k_r$ に対して, 組 $\boldsymbol{k} := (k_1,\ldots,k_r)$ をインデックスという. $r=0$ の場合に空インデックスというものを考え, $\varnothing$ で表す. インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して, その深さを $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}) := r$, 重さを $\mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) := k_1+\cdots+k_r$ と定義する. 空インデックスに対しては, $\mathrm{dep}(\varnothing) := \mathrm{wt}(\varnothing) := 0$ である.

インデックスというものを導入することによって多重ゼータ値をインデックスの関数と見なすことができる. 具体的には, $2 \leq k_r$ であるインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1,\ldots,k_r)$ に対して,

$$\zeta(\boldsymbol{k}) := \zeta(k_1,\ldots,k_r)$$

と定義される. 空インデックスに対しては, $\zeta(\varnothing) := 1$ と定める. $2 \leq k_r$ であるインデックスと空インデックスを許容インデックスという.

Definition 1.4 (Hoffman 代数)**.** 有理数係数の x, y からなる非可換多項式環を Hoffman 代数という. これを $\mathfrak{H}$ と表す. $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}x$ と定義する.

非可換多項式であるとは, ここで x と y を交換できないということである. つまり, Hoffman 代数においては $xy \neq yx$ である. インデックス $(k_1,\ldots,k_r)$ と Hoffman 代数の元 $yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}$ を同一視することによって,

$$\zeta(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}) := \zeta(k_1,\ldots,k_r)$$

と定義する. Hoffman 代数の単位元 $1_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$ と空インデックス $\varnothing$ を同一視する. この同一視によって, $\mathfrak{H}^1$ の単項式に対しても重さ, 深さと言った用語を用いることにする. また, $\mathfrak{H}^1$ の元に定義されている写像は, この同一視により特に断りなくインデックスに対しても定義されているとする. ζ を $\mathbb{Q}$ 線形写像として定義することによって $\mathfrak{H}^0$ に対して値が定義される. 具体例を挙げると,

$$\zeta(yx^2 + 2y^2x) = \zeta(3) + 2\zeta(1,2)$$

のようになる．Hoffman 代数を用いると多重ゼータスター値を

$$\zeta(yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1}\cdots(y+x)x^{k_r-1})=\zeta^\star(k_1,\ldots,k_r)$$

と表すことができる．

1.3 シャッフル積

これから Hoffman 代数上でシャッフル積と調和積を定義する．これは後で出てくる多重ゼータ値のシャッフル関係式と調和関係式を記述するための準備である．

Definition 1.5. x,y からなる単項式 $w_1,w_2,w\in\mathfrak{H}$ と $u_1,u_2\in\{x,y\}$ に対して,

$$\begin{aligned} w_1u_1 ш w_2u_2 &= (w_1 ш w_2u_2)u_1+(w_1u_1 ш w_2)u_2 \\ 1_{\mathfrak{H}} ш w &= w ш 1_{\mathfrak{H}} = w \end{aligned}$$

によって $w_1 ш w_2\in\mathfrak{H}$ が定まる．$w_1,w_2\in\mathfrak{H}$ に対して, $(w_1,w_2)\mapsto w_1 ш w_2$ が $\mathbb{Q}$ 双線形写像になるように定めることによって, $\mathfrak{H}$ における積 ш が定まる．これをシャッフル積という．

定義から, この積は可換であることが分かる．具体例を挙げると,

$$yx ш yx=(y ш yx)x+(yx ш y)x=2(y ш yx)=2(yxy+(y ш y)x)x=2yxyx+4y^2x^2$$

のようになる．$(w_1,w_2)\mapsto w_1 ш w_2$ が双線形写像であるとは, $c\in\mathbb{Q}$ と $w_1,w_2,w_3\in\mathfrak{H}$ に対して,

$$(cw_1+w_2) ш w_3=c(w_1 ш w_3)+w_2 ш w_3, w ш (cw_2+w_3)=w_1 ш w_2+c(w_1 ш w_3)$$

のように計算できるということである．具体例を挙げると,

$$(x+2y) ш (2x+y)=x ш (2x+y)+2y ш (2x+y)=2x ш x+x ш y+4y ш x+2y ш y$$

というように計算できる．

$$\begin{aligned} (w_1u_1 ш w_2u_2) ш w_3u_3 &= ((w_1 ш w_2u_2) ш w_3u_3)u_1+((w_1u_1 ш w_2u_2) ш w_3u_3)u_2 \\ &\quad+((w_1u_1 ш w_2u_2) ш w_3)u_3 \\ w_1u_1 ш (w_2u_2 ш w_3u_3) &= (w_1 ш (w_2u_2 ш w_3u_3))u_1+(w_1u_1 ш (w_2u_2 ш w_3u_3))u_2 \\ &\quad+(w_1u_1 ш (w_2u_2 ш w_3))u_3 \end{aligned}$$

となることと重さに関する帰納法によってシャッフル積は結合的であることも分かるので,

$$w_1 ш w_2 ш w_3 = (w_1 ш w_2) ш w_3 = w_1 ш (w_2 ш w_3)$$

と書くことができる.

1.4 調和積

Definition 1.6. 自然数 $1 \leq k$ に対して, $z_k := yx^{k-1}$ とすると, y から始まる単項式は,

$$yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1} = z_{k_1} \cdots z_{k_r}$$

と書ける. 単項式 $w_1, w_2, w \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\begin{aligned} w_1 z_{k_1} * w_2 z_{k_2} &= (w_1 * w z_{k_2}) z_{k_1} + (w_1 z_{k_1} * w_2) z_{k_2} \\ 1_{\mathfrak{H}} * w &= w * 1_{\mathfrak{H}} = w \end{aligned}$$

によって $w_1 * w_2 \in \mathfrak{H}^1$ が定まる. これをシャッフル積のときと同様に双線形に拡張して, $\mathfrak{H}^1$ における積 $*$ が定まる. これを調和積という.

定義からこの積も可換であることが分かる. 具体例を挙げると,

$$z_{k_1} * z_{k_2} = z_{k_1} z_{k_2} + z_{k_2} z_{k_1} + z_{k_1+k_2}$$

のようになる. シャッフル積と同様の方法でこの積も結合的であることを示すことができる.

1.5 直和予想と次元予想

多重ゼータ値の研究においては, 多重ゼータ値の間にどのような関係式があるかということに興味が持たれる. それを考えるうえで重要な予想がいくつか存在する.

Conjecture 1.7 (直和予想)**.** $\mathcal{Z}_0 := \mathbb{Q}$, $\mathcal{Z}_k$ を重さ k の許容インデックスにおける多重ゼータ値によって生成される $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とする. このとき,

$$\bigcup_{0 \leq n} \mathcal{Z}_n = \bigoplus_{0 \leq n} \mathcal{Z}_n$$

が成立する.

これは, 異なる重さの多重ゼータ値の間に線形関係式が存在しないということを意味する予想である. 具体的には, $A, B, C, D, E \in \mathbb{Q}$ として,

$$A\zeta(4) + B\zeta(1,3) + C\zeta(3) + D\zeta(1,2) + E\zeta(2) = 0$$

のように異なる重さのインデックスが混ざっている関係式は必ず,

$$A\zeta(4) + B\zeta(1,3) = 0, \quad C\zeta(3) + D\zeta(1,2) = 0, \quad E\zeta(2) = 0$$

のような同じ重さの線形関係式のいくつかの和になっているということを意味している.

Conjecture 1.8 (次元予想; Zagier [Z]). $\mathcal{Z}_n$ の $\mathbb{Q}$ 上の次元は

$$\sum_{0 \le n} t^n \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_n = \frac{1}{1 - t^2 - t^3}$$

によって与えられる.

この次元予想によって予想される $\mathcal{Z}_n$ の次元は, 多重ゼータ値の許容インデックスの数に比べて非常に少ない. これは多重ゼータ値の間に非常に多くの線形関係式が存在していることを意味している. 例えば, 重さ 10 のときの許容インデックスの個数は, $2^8 = 256$ 個であるが, 予想によれば, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{10} = 7$ である. これは重さ 10 の多重ゼータ値の間には, $256 - 7 = 249$ 個の独立な線形関係式が存在することを意味する.

2　反復積分表示と双対性

2.1　多重ポリログ

Definition 2.1. インデックス $\boldsymbol{k}$ と $|z| \le 1$ である複素数に対して,

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) := \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

によって多重ポリログを定める. 空インデックスに対しては, $\mathrm{Li}_{\varnothing}(z) = 1$ と定める.

$z = 1$ のとき, 多重ポリログは多重ゼータ値に一致する. 多重ポリログもインデックスと単項式の同一視によって,

$$\mathrm{Li}_{yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1}}(z) = \mathrm{Li}_{k_1, \ldots, k_r}(z)$$

と表し, $\mathfrak{H}^1$ の元に対して定義を拡張する.

$$\mathrm{Li}_1(z) = \sum_{0<n} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$$

であることが分かる.

2.2 反復積分表示

Definition 2.2 (反復積分)**.** $z \in [0,1]$, 微分形式 $x(t) := \frac{dt}{t}, y(t) := \frac{dt}{1-t}$ を用いて, $u_1 = y, u_2, \ldots, u_n \in \{x, y\}$ に対して, 反復積分を

$$I_z(u_1 \cdots u_r) := \int_{0<t_1<\cdots<t_n<z} u_1(t_1)\cdots u_n(t_n)$$

$I_z(1) = 1$ によって定義する. I_z を線形写像として, $\mathfrak{H}^1$ の元に対して拡張できる.

具体例を挙げると,

$$I_z(yx) = \int_{0<s<t<z} \frac{ds}{1-s}\frac{dt}{t}$$

のようになる.

Proposition 2.3 (多重ポリログの反復積分表示)**.** $w \in \mathfrak{H}^1, z \in [0,1]$ に対し,

$$I_z(w) = \mathrm{Li}_w(z)$$

が成り立つ.

Proof. 線形性から w が単項式の場合を示せば十分である. 重さに関する帰納法を用いる. 重さ 0 の場合は明らか, $\mathrm{wt}(w)$ まで成立していると仮定する.

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{wx}(z) = \frac{1}{z}\mathrm{Li}_w(z)$$
$$\frac{d}{dz}I_z(wx) = \frac{1}{z}I_z(w)$$

より, 帰納法の仮定から $\mathrm{Li}_w(z) = I_z(w)$ であり, $\mathrm{Li}_{wx}(0) = I_0(wx) = 0$ であるから, $\mathrm{Li}_{wx}(z) = I_z(wx)$ である. 同様に

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_{wy}(z) = \frac{1}{1-z}\mathrm{Li}_w(z)$$
$$\frac{d}{dz}I_z(wy) = \frac{1}{1-z}I_z(w)$$

より, $\mathrm{Li}_{wy}(z) = I_z(wy)$ である. よって $\mathrm{wt}(w)+1$ の場合も成り立つことが示された. □

特に $I_1(w)$ を単に $I(w)$ と書くことにする. 多重ゼータ値の反復積分表示は,

$$I(w) = \zeta(w)$$

となる.

2.3 双対性

Theorem 2.4 (双対性; Hoffman [H1, Corollary 6.2])**.** $\mathfrak{H}$ 上の反自己同型 τ を $\tau(x) = y, \tau(x) = y$ によって定める. このとき, $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\zeta(w) = \zeta(\tau(w))$$

が成立する.

Proof. $u_1 = y, u_2, \ldots, u_{r-1}, u_n = x \in \{x, y\}$ として, 多重ゼータ値の反復積分表示

$$\zeta(u_1 \cdots u_n) = \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} u_1(t_1) \cdots u_n(t_n)$$

において $t_i \to 1 - t_{n-i+1}$ と変数変換することによって,

$$\int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} u_1(t_1) \cdots u_r(t_r) = \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \tau(u_n)(t_1) \cdots \tau(u_1)(t_n)$$

となるから,

$$\zeta(u_1 \cdots u_n) = \zeta(\tau(u_n) \cdots \tau(u_1)) = \zeta(\tau(u_1 \cdots u_n))$$

を得る. □

τ は明示的には,

$$\tau(yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1}) = y^{k_r-1}x \cdots y^{k_1-1}x$$

という線形写像になる. $\mathfrak{H}^0$ においては, $0 < a_1, \cdots a_s, b_1, \cdots, b_s$ として,

$$\tau(y^{a_1}x^{b_1} \cdots y^{a_s}x^{b_s}) = y^{b_s}x^{a_s} \cdots y^{b_1}x^{a_1}$$

をインデックスで考えると,

$$\tau((\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \ldots, \{1\}^{a_s-1}, b_s+1)) = (\{1\}^{b_s-1}, a_s+1, \ldots, \{1\}^{b_1-1}, a_1+1)$$

となることが分かる. ここで, $\{X\}^m$ という記号は $X, \ldots, X$ と X を m 回繰り返したものを意味する. 許容インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して, $\tau(\boldsymbol{k})$ も許容インデックスであり, $\boldsymbol{k}^\dagger := \tau(\boldsymbol{k})$ を双対インデックスという. 具体例を挙げると,

$$\zeta(1,2) = \zeta(3), \quad \zeta(1,2,2) = \zeta(2,3)$$

のようになる.

3 複シャッフル関係式

3.1 シャッフル関係式

Theorem 3.1 (多重ポリログのシャッフル関係式)**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\mathrm{Li}_{w_1}(z)\mathrm{Li}_{w_2}(z) = \mathrm{Li}_{w_1 ш w_2}(z)$$

が成り立つ.

Proof. まず, w_1, w_2 が単項式の場合に示せば十分である. w_1, w_2 のどちらか一方が有理数の場合は明らか. 二つの単項式の重さの和に関する帰納法を用いる. $\mathrm{wt}(w_1) + \mathrm{wt}(w_2) + 1$ まで成立しているとする. 反復積分表示により, $u_1, u_2 \in \{x, y\}$ とすると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{w_1u_1}(z)\mathrm{Li}_{w_2u_2}(z) &= I_z(w_1u_1)I_z(w_2u_2) \\
&= \int_{0<s<z} I_s(w_1)u_1(s) \int_{0<t<z} I_t(w_2)u_2(t) \\
&= \int_{0<s<t<z} I_s(w_1)u_1(s)I_t(w_2)u_2(t) \\
&\quad + \int_{0<t<s<z} I_s(w_1)u_1(s)I_t(w_2)u_2(t) \\
&= \int_{0<t<z} I_t(w_1u_1)I_t(w_2)u_2(t) + \int_{0<s<z} I_s(w_1)u_1(s)I_s(w_2u_2) \\
&= \int_{0<t<z} I_t(w_1u_1 ш w_2)u_2(t) + \int_{0<s<z} I_s(w_1 ш w_2u_2)u_1(s) \\
&= I_z((w_1u_1 ш w_2)u_2) + I_z((w_1 ш w_2u_2)u_1) \\
&= I_z(w_1u_1 ш w_2u_2)
\end{aligned}$$

よって $\mathrm{wt}(w_1) + \mathrm{wt}(w_2) + 2$ でも成立する. □

具体例を挙げると,

$$\mathrm{Li}_2(z)^2 = \mathrm{Li}_{yx ш yx}(z) = 4\mathrm{Li}_{y^2x^2}(z) + 2\mathrm{Li}_{yxyx}(z) = 4\mathrm{Li}_{1,3}(z) + 2\mathrm{Li}_{2,2}(z)$$

のようになる.

Corollary 3.2 (多重ゼータ値のシャッフル関係式)**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\zeta(w_1)\zeta(w_2) = \zeta(w_1 ш w_2)$$

が成り立つ.

これによって, 重さ k_1 の多重ゼータ値と重さ k_2 の多重ゼータ値の積は, 重さ k_1+k_2 の多重ゼータ値のいくつかの和で表されることが分かる.

3.2 調和関係式

Definition 3.3 (多重調和和)**.** インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と非負整数 n に対して, 多重調和和を

$$\zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r<n} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

によって定義する. $\zeta_{<n}(\varnothing) := 1$ と定義し, 多重ポリログのときと同様に定義域を $\mathfrak{H}^1$ へ拡張する.

Theorem 3.4 (多重調和和の調和関係式)**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\zeta_{<n}(w_1)\zeta_{<n}(w_2) = \zeta_{<n}(w_1 * w_2)$$

が成立する.

Proof. まず, w_1, w_2 が単項式の場合に示せば十分である. w_1, w_2 のどちらか一方が有理数の場合は明らか. 二つの単項式の深さの和に関する帰納法を用いる. $\mathrm{dep}(w_1)+\mathrm{dep}(w_2)+$

1 まで成立しているとする.

$$\begin{aligned}
\zeta_{<n}(w_1 z_{k_1})\zeta_{<n}(w_2 z_{k_2}) &= \sum_{0<a<n} \frac{1}{a^{k_1}}\zeta_{<a}(w_1) \sum_{0<b<n} \frac{1}{b^{k_2}}\zeta_{<b}(w_2) \\
&= \sum_{0<a<b<n} \frac{1}{a^{k_1}}\zeta_{<a}(w_1)\frac{1}{b^{k_2}}\zeta_{<b}(w_2) \\
&\qquad + \sum_{0<b<a<n} \frac{1}{a^{k_1}}\zeta_{<a}(w_1)\frac{1}{b^{k_2}}\zeta_{<b}(w_2) \\
&\qquad\qquad + \sum_{0<a=b<n} \frac{1}{a^{k_1}}\zeta_{<a}(w_1)\frac{1}{b^{k_2}}\zeta_{<b}(w_2) \\
&= \sum_{0<b<n} \frac{1}{b^{k_2}}\zeta_{<b}(w_1 z_{k_1})\zeta_{<b}(w_2) \\
&\qquad + \sum_{0<a<n} \frac{1}{a^{k_1}}\zeta_{<a}(w_1)\zeta_{<a}(w_2 z_{k_2}) \\
&\qquad\qquad + \sum_{0<a<n} \frac{1}{a^{k_1+k_2}}\zeta_{<a}(w_1)\zeta_{<a}(w_2) \\
&= \sum_{0<b<n} \frac{1}{b^{k_2}}\zeta_{<b}(w_1 z_{k_1} * w_2) + \sum_{0<a<n} \frac{1}{a^{k_1}}\zeta_{<a}(w_1 * w_2 z_{k_2}) \\
&\qquad + \sum_{0<a<n} \frac{1}{a^{k_1+k_2}}\zeta_{<a}(w_1 * w_2) \\
&= \zeta_{<n}((w_1 z_{k_1} * w_2) z_{k_2} + (w_1 * w_2 z_{k_2}) z_{k_1} + (w_1 * w_2) z_{k_1+k_2}) \\
&= \zeta_{<n}(w_1 z_{k_1} * w_2 z_{k_2})
\end{aligned}$$

よって $\mathrm{dep}(w_1) + \mathrm{dep}(w_2) + 2$ でも成立する. □

具体例を挙げると,

$$\zeta_{<n}(1)\zeta_{<n}(2) = \zeta_{<n}(1,2) + \zeta_{<n}(2,1) + \zeta_{<n}(3)$$

のようになる. 許容インデックスに対する多重調和和は $n \to \infty$ と極限を考えることによって多重ゼータ値に収束するから, 多重ゼータ値の調和関係式が従う.

Corollary 3.5 (多重ゼータ値の調和関係式)**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\zeta(w_1)\zeta(w_2) = \zeta(w_1 * w_2)$$

が成り立つ.

これによって, シャッフル積とは別の方法で, 多重ゼータ値の積を多重ゼータ値の線形和で表すことができる. この 2 つの積を比較することによって以下の関係式族が得られる.

Proposition 3.6 (有限複シャッフル関係式)**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\zeta(w_1 ш w_2) = \zeta(w_1 * w_2)$$

が成り立つ.

具体例を挙げると,

$$\zeta((2) ш (2)) = 4\zeta(1,3) + 2\zeta(2,2)$$
$$\zeta((2) * (2)) = \zeta(4) + 2\zeta(2,2)$$

の差として, 関係式

$$\zeta(4) = 4\zeta(1,3)$$

が得られる. 有限複シャッフル関係式から非常に多くの関係式を得ることができるが, 有限複シャッフル関係式からは得られない関係式もある. 例えば, 双対性から従う

$$\zeta(3) = \zeta(1,2)$$

という関係式は有限複シャッフル関係式から得られない. 有限複シャッフルは両方のインデックスが重さ 2 以上である必要があるので, 得られる関係式は重さ 4 以上となり, 重さ 3 の関係式を得ることができないからである. しかし, 有限複シャッフルが許容インデックス以外にも拡張できる場合がある. 例えば,

$$\zeta((1) ш (2) - (1) * (2)) = \zeta(1,2) - \zeta(3) = 0$$

である. $\zeta((1) ш (2)), \zeta((1) * (2))$ は発散してしまい, まだ意味を持たないが, 発散する多重ゼータ値に有限値を与える正規化を行うことによって, 有限複シャッフル関係式を一般化した正規化複シャッフル関係式を得ることができる.

3.3 シャッフル正規化

Proposition 3.7 (シャッフル正規化多項式)**.** $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, 以下の条件を満たす T の多項式 $\zeta^{ш}(w;T)$ が一意に存在する.

(i) $\zeta^{ш}(y;T) = T$

(ii) $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して, $\zeta^{ш}(w;T) = \zeta(w)$

(iii) $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $\zeta^{ш}(w_1;T)\zeta^{ш}(w_2;T) = \zeta^{ш}(w_1 \mathbin{ш} w_2;T)$

この $\zeta^{ш}(w;T)$ をシャッフル正規化多項式という.

Proof. $w \in \mathfrak{H}^1$ を単項式とすると, $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ と非負整数 n を用いて $w = w_0 y^n$ と一意的に書ける. まず,

$$w_0 \mathbin{ш} y - w_0 y \in \mathfrak{H}^0$$

である. $1 \leq n$ のとき,

$$w_0 y^n = \frac{1}{n}(w_0 y^{n-1} \mathbin{ш} y - (w_0 \mathbin{ш} y - w_0 y) y^{n-1}) \in \mathfrak{H}^0 y^{n-1} \mathbin{ш} y + \mathfrak{H}^0 y^{n-1}$$

だから, この操作を繰り返すことによって,

$$w_0 y^n \in \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{H}^0 \mathbin{ш} y^{ш k}$$

であることが分かる. ここで, $y^{ш k}$ は $y \mathbin{ш} \cdots \mathbin{ш} y$ と k 回シャッフルしたものを表す. ここから, $v_0, \ldots, v_n \in \mathfrak{H}^0$ があって,

$$w_0 y^n = \sum_{k=0}^{n} v_k \mathbin{ш} y^{ш k}$$

と書くことができ, そのときの値は (i),(ii) から

$$\zeta^{ш}(w_0 y^n;T) = \sum_{k=0}^{n} \zeta(v_k) T^k$$

と定めて $\mathcal{H}^1$ に線形に拡張する. 後はこれが (iii) を満たすことを確認すればよい. $w, v \in \mathfrak{H}^1$ を $w_0, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_m \in \mathfrak{H}^0$ で

$$w = \sum_{k=0}^{n} w_k \mathbin{ш} y^{ш k}, \quad v = \sum_{l=0}^{m} v_l \mathbin{ш} y^{ш l}$$

と表したとき,

$$\begin{aligned} \zeta^{ш}(w \mathbin{ш} v;T) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \zeta^{ш}(w_k \mathbin{ш} y^{ш k} \mathbin{ш} v_l \mathbin{ш} y^{ш l};T) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \zeta(w_k)\zeta(v_l) T^{k+l} \\ &= \zeta^{ш}(w;T)\zeta^{ш}(v;T) \end{aligned}$$

より示される. $\square$

具体例を挙げると, $w = yxy$ の場合

$$yxy = yx ш y - 2yyx$$

と書けるから,

$$\zeta^{ш}(2,1;T) = \zeta^{ш}(yxy;T) = \zeta(yx)T - 2\zeta(yyx) = \zeta(2)T - 2\zeta(1,2)$$

となる.

3.4 調和正規化

Proposition 3.8 (調和正規化多項式)**.** $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, 以下の条件を満たす T の多項式 $\zeta^*(w;T)$ が一意に存在する.

(i) $\zeta^*(y;T) = T$
(ii) $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して, $\zeta^*(w;T) = \zeta(w)$
(iii) $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $\zeta^*(w_1;T)\zeta^*(w_2;T) = \zeta^*(w_1 * w_2;T)$

この $\zeta^*(w;T)$ を調和正規化多項式という.

Proof. シャッフル積の場合と全く同様の議論により, $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $w_0, \ldots, w_k \in \mathfrak{H}^0$ があって,

$$w = \sum_{k=0}^{n} w_k y^{*k}$$

と表される. ここで, y^{*k} は $y * \cdots * y$ と k 回調和積したものを表す. これに対して,

$$\zeta^*(w;T) = \sum_{k=0}^{n} \zeta(w_k)T^k$$

と定めれば良い. (iii) が満たされることもシャッフル正規化多項式の場合と全く同様に示される. $\square$

3.5 正規化定理

一般にシャッフル正規化多項式と調和正規化多項式は一致しない. この 2 つの間の関係を与えるのが正規化定理である.

Proposition 3.9. $w \in \mathfrak{H}^1$ とする. $z \to 1$ においてある定数 $0 < m$ があって, 以下の漸近展開が成り立つ.

$$\mathrm{Li}_w(z) = \zeta^{ш}(w; \mathrm{Li}_1(z)) + O((1-z)\mathrm{Li}_1(z)^m)$$

Proof. $wx \in \mathfrak{H}^0$ がモニックな単項式のとき, $0 < z < 1$ として, $\mathrm{dep}(w) = r$ とすると,

$$\begin{aligned}
\zeta(wx) - \mathrm{Li}_{wx}(z) &= \int_{z<t<1} \frac{\mathrm{Li}_w(t)}{t}\, dt \\
&\leq \frac{1}{z} \int_{z<t<1} \mathrm{Li}_{y^r}(t)\, dt \\
&\leq \frac{1}{z} \int_{z<t<1} \mathrm{Li}_1(t)^r\, dt \\
&= \frac{1}{z} \left((1-z)\mathrm{Li}_1(z)^r + r \int_{z<t<1} (1-t)\mathrm{Li}_1(t)^{r-1}\, dt \right) \\
&= O((1-z)\mathrm{Li}_1(z)^r)
\end{aligned}$$

よって, $\mathfrak{H}^0$ において成立する. $w \in \mathfrak{H}^1$ とするとき, $w_0, \ldots, w_n \in \mathfrak{H}^0$ を用いて,

$$w = \sum_{k=0}^{n} w_k \mathbin{ш} y^{ш k}$$

と表すと, $z \to 1$ において, 定数 $0 < m$ を十分大きく取れば,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_w(z) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Li}_{w_k}(z)\mathrm{Li}_1(z)^k &= \sum_{k=0}^{n} \zeta(w_k)\mathrm{Li}_1(z)^k + O((1-z)\mathrm{Li}_1(z)^m) \\
&= \zeta^{ш}(w; \mathrm{Li}_1(z)) + O((1-z)\mathrm{Li}_1(z)^m)
\end{aligned}$$

となることが分かる. □

Proposition 3.10. $w \in \mathfrak{H}^1$ とする. $N \to \infty$ においてある定数 $0 < m$ があって, 以下の漸近展開が成り立つ.

$$\zeta_{<N}(w) = \zeta^{*}(w; \zeta_{<N}(1)) + O\left(\frac{\zeta_{<N}(1)^m}{N} \right)$$

Proof. $w = yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1} \in \mathfrak{H}^0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\zeta(w) - \zeta_{<N}(w) &= \sum_{N\leq n} \frac{\zeta_{<n}(k_1,\dots,k_{r-1})}{n^{k_r}} \\
&\leq \sum_{N\leq n} \frac{\zeta_{<n}(\{1\}^{r-1})}{n^2} \\
&\leq \sum_{N\leq n} \frac{\zeta_{<n}(1)^{r-1}}{n^2}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\zeta_{<n}(1) = \gamma + \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

であることと,

$$\int_N^\infty \frac{\ln^m x}{x^2}\,dx = O\left(\frac{\ln^m N}{N}\right) = O\left(\frac{\zeta_{<N}(1)^m}{N}\right)$$

であることを用いると,

$$\sum_{N\leq n} \frac{\zeta_{<n}(1)^{r-1}}{n^2} = O\left(\frac{\ln^{r-1} N}{N}\right)$$

であることが分かる. よって $\mathfrak{H}^0$ において成立する. $w \in \mathfrak{H}^1$ とするとき, $w_0,\dots,w_n \in \mathfrak{H}^0$ を用いて,

$$w = \sum_{k=0}^n w_k * y^{*k}$$

と表すと, $N \to \infty$ において, 定数 $0 < m$ を十分大きく取れば,

$$\begin{aligned}
\zeta_{<N}(w) = \sum_{k=0}^n \zeta_{<N}(w_k)\zeta_{<N}(1)^k &= \sum_{k=0}^n \zeta(w_k)\zeta_{<N}(1)^k + O\left(\frac{\zeta_{<N}(1)^m}{N}\right) \\
&= \zeta^*(w;\zeta_{<N}(1)) + O\left(\frac{\zeta_{<N}(1)^m}{N}\right)
\end{aligned}$$

となること分かる. □

Proposition 3.11. インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$\zeta^{ш}(\boldsymbol{k},\{1\}^n;T) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \zeta^{ш}(\{1\}^{n-k};T) \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r \\ 0<m_1\leq\cdots\leq m_k\leq n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{1}{m_1\cdots m_k}$$

$$\zeta^{*}(\boldsymbol{k},\{1\}^n;T) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \zeta^{*}(\{1\}^{n-k};T) \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r \\ 0<m_1\leq\cdots\leq m_k\leq n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{1}{m_1\cdots m_k}$$

Proof. 1 つ目の等式は, 十分大きな m を取れば

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k},\{1\}^n}(z) = &\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<m_1<\cdots<m_n} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{1}{m_1\cdots m_n} z^{m_n} \\
&= \mathrm{Li}_{\{1\}^n}(z) \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \\
&\quad - \sum_{0<n_1<\cdots<n_r\geq m_1<m_2\cdots<m_n} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{1}{m_1\cdots m_n} z^{m_n} \\
&= \mathrm{Li}_{\{1\}^n}(z) \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \\
&\quad - \mathrm{Li}_{\{1\}^{n-1}}(z) \sum_{0<n_1<\cdots<n_r\geq m_1>0} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{1}{m_1} \\
&\qquad + \sum_{0<n_1<\cdots<n_r\geq m_1\geq m_2<m_3\cdots<m_n} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{1}{m_1\cdots m_n} z^{m_n} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{Li}_{\{1\}^{n-k}}(z) \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r \\ 0<m_1\leq\cdots\leq m_k\leq n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{1}{m_1\cdots m_k} \\
&\quad + (-1)^n \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r \\ 0<m_1\leq\cdots\leq m_k\leq n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{z^{m_1}-1}{m_1\cdots m_k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \zeta^{ш}(\{1\}^{n-k};\mathrm{Li}_1(z)) \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r \\ 0<m_1\leq\cdots\leq m_k\leq n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{1}{m_1\cdots m_k} \\
&\quad + O((1-z)\mathrm{Li}_1(z)^m)
\end{aligned}
$$

が成り立つことによって示される. 最後の等号は,

$$
\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r \\ 0<m_1\leq\cdots\leq m_k\leq n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{z^{m_1}-1}{m_1\cdots m_k}
$$

が $z\to 1$ で 0 に収束することによって, 十分大きな m を用いて,

$$
O((1-z)\mathrm{Li}_1(z)^m)
$$

と書けることが前の定理から分かることによる. 2 つ目の等式も同様の変形によって, 十

分大きな m と取ると,

$$\begin{aligned}
\zeta_{<N}(\boldsymbol{k},\{1\}^n) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\zeta_{<N}(\{1\}^{n-k}) \sum_{\substack{0<n_1\le\cdots\le n_r<N\\ 0<m_1\le\cdots\le m_k\le n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\frac{1}{m_1\cdots m_k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\zeta^*(\{1\}^{n-k};\zeta_{<N}(1)) \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r\\ 0<m_1\le\cdots\le m_k\le n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\frac{1}{m_1\cdots m_k}\\
&\qquad + O\left(\frac{\zeta_{<N}(1)^m}{N}\right)
\end{aligned}$$

であることから従う. □

Theorem 3.12 (正規化定理; Ihara-Kaneko-Zagier[IKZ, Theorem 1])**.** 多項式環 $\mathbb{C}[T]$ の上の線形写像 ρ を

$$\rho(\zeta^*(\{1\}^n;T)) = \zeta^{ш}(\{1\}^n;T)$$

によって導入する. このとき, $w\in\mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\rho(\zeta^*(w;T)) = \zeta^{ш}(w;T)$$

が成立する.

Proof. 前の命題より, インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\rho(\zeta^*(\boldsymbol{k},\{1\}^n;T))\\
&= \rho\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\zeta^*(\{1\}^{n-k};T) \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r\\ 0<m_1\le\cdots\le m_k\le n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\frac{1}{m_1\cdots m_k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\zeta^{ш}(\{1\}^{n-k};T) \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r\\ 0<m_1\le\cdots\le m_k\le n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\frac{1}{m_1\cdots m_k}\\
&= \zeta^{ш}(\boldsymbol{k},\{1\}^n;T)
\end{aligned}$$

であることから分かる. □

具体的に $\zeta^*(\{1\}^n;T),\zeta^{ш}(\{1\}^n;T)$ がどのように表せるかを考えてみる. まず, シャッフル正規化多項式の方は

$$\zeta^{ш}(\{1\}^n;T) = \frac{1}{n!}\zeta^{ш}((1)^{ш n};T) = \frac{T^n}{n!}$$

と表せる．よって，母関数を考えると，

$$\sum_{0\le n}\zeta^{\text{ш}}(\{1\}^n;T)t^n=e^{Tt}$$

となる．

Proposition 3.13. 形式的べき級数環 $\mathfrak{H}^1[[t]]$ 上の等式

$$\frac{1}{1-yt}=\sum_{0\le n}y^nt^n=\exp_*\left(\sum_{0<n}\frac{(-1)^{n-1}z_n}{n}t^n\right)$$

が成立する．ここで，$\exp_*$ は

$$\exp_*(u):=\sum_{0\le n}\frac{u^{*n}}{n!}$$

によって定義されるものとする．

Proof. 調和積によって，

$$\begin{aligned}
ny^n&=y^{n-1}*z_1-\sum_{k=0}^{n-2}y^kz_2y^{n-k-2}\\
&=y^{n-1}*z_1-y^{n-2}*z_2+\sum_{k=0}^{n-3}y^kz_3y_{n-k-3}\\
&=\cdots\\
&=\sum_{k=1}^{n}y^{n-k}*(-1)^{k-1}z_k
\end{aligned}$$

と変形できることから，

$$\frac{d}{dt}\sum_{0\le n}y^nt^n=\sum_{0<n}ny^nt^{n-1}=\sum_{0\le n}y^nt^n*\sum_{0<k}(-1)^{k-1}z_kt^{k-1}$$

が得られる．また，

$$\frac{d}{dt}\exp_*\left(\sum_{0<n}\frac{(-1)^{n-1}z_n}{n}t^n\right)=\exp_*\left(\sum_{0<n}\frac{(-1)^{n-1}z_n}{n}t^n\right)*\sum_{0<k}(-1)^{k-1}z_kt^{k-1}$$

であるから両辺は微分が等しい，よって $t=0$ のときに両辺が 1 になることから，等式が従う． $\square$

Corollary 3.14. 形式的べき級数 $\mathbb{C}[[t]]$ 上の等式

$$\sum_{0\le n}\zeta^*(\{1\}^n;T)t^n = \exp\left(\sum_{0<n}\frac{(-1)^{n-1}\zeta^*(n;T)}{n}t^n\right) = e^{Tt}\exp\left(\sum_{0<n}\frac{(-1)^{n-1}\zeta(n)}{n}t^n\right)$$

が成立する.

これらを用いると, ρ は

$$\rho(e^{Tt}) = e^{Tt}\exp\left(\sum_{0<n}\frac{(-1)^{n}\zeta(n)}{n}t^n\right)$$

として計算できることが分かる. ここでガンマ関数を用いると,

$$\exp\left(\sum_{0<n}\frac{(-1)^{n}\zeta(n)}{n}t^n\right) = e^{\gamma t}\Gamma(1+t)$$

と表せることが知られている. 多重ゼータ値の文脈では, $e^{\gamma t}\Gamma(1+t)$ でひとかたまりと見なすのが自然である.

3.6 正規化複シャッフル関係式

正規化定理を用いることによって, 有限複シャッフル関係式を正規化複シャッフル関係式に拡張できる.

Theorem 3.15 (正規化複シャッフル関係式; Ihara-Kaneko-Zagier[IKZ, Theorem 2])**.** $w_0 \in \mathfrak{H}^0, w_1 \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\zeta^{ш}(w_0 ш w_1;T) = \zeta^{ш}(w_0 * w_1;T)$$
$$\zeta^{*}(w_0 ш w_1;T) = \zeta^{*}(w_0 * w_1;T)$$

が成り立つ.

Proof. 正規化定理

$$\zeta^{ш}(w_1;T) = \rho(\zeta^*(w_1;T))$$

の両辺に $\zeta(w_0)$ を書けることによって,

$$\begin{aligned}\zeta^{ш}(w_0 ш w_1;T) &= \zeta(w_0)\zeta^{ш}(w_1;T)\\ &= \zeta(w_0)\rho(\zeta^*(w_1;T))\\ &= \rho(\zeta^*(w_0 * w_1;T))\\ &= \zeta^{ш}(w_0 * w_1;T)\end{aligned}$$

が従う. 両辺に ρ^{-1} を作用させて 2 つ目の式も得られる. □

Definition 3.16. $w \in \mathfrak{H}^1$ を $w_0,\dots,w_n \in \mathfrak{H}^0$ によって,

$$w = \sum_{k=0}^{n} w_k ш y^{шk}$$

と書いたときの定数項 w_0 を $\mathrm{reg}_{ш}(w)$ と表す. 同様に $w \in \mathfrak{H}^1$ を $w_0,\dots,w_n \in \mathfrak{H}^0$ によって,

$$w = \sum_{k=0}^{n} w_k ш y^{*k}$$

と書いたときの定数項 w_0 を $\mathrm{reg}_*(w)$ と表す.

正規化複シャッフル関係式の定数項はそれぞれ

$$\zeta(\mathrm{reg}_{ш}(w_0 ш w_1 - w_0 * w_1)) = 0$$
$$\zeta(\mathrm{reg}_{*}(w_0 ш w_1 - w_0 * w_1)) = 0$$

と多重ゼータ値の関係式族として表すことができる. 以下, $\zeta^{ш}(w;0), \zeta^*(w;0)$ をそれぞれ, $\zeta^{ш}(w), \zeta^*(w)$ と書くことにする. 以下のような予想がある.

Conjecture 3.17. 多重ゼータ値の全ての線形関係式は正規化複シャッフル関係式によって導かれる.

つまり, 多重ゼータ値において成り立っている関係式は全て正規化複シャッフル関係式から従うと予想されているわけであるが, 多重ゼータ値の双対性はまだ一般の場合に正規化複シャッフル関係式に含まれているかどうかは分かっていない.

4　導分関係式と Ohno 関係式

4.1　導分関係式

Definition 4.1. 写像 $f : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ は, $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$ に対して,

$$f(w_1 w_2) = f(w_1)w_2 + w_1 f(w_2)$$

を満たすとき, 導分であるという.

Proposition 4.2. f が導分であるとき,

$$\exp(tf) := \sum_{0 \leq n} \frac{t^n}{n!} f^n$$

は $\mathfrak{H}[[t]]$ 上の同型写像である. ここで, f^n は f の n 回合成写像とする.

Proof. $0 \leq n$ に対して, 帰納的に

$$f^n(w_1 w_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k(w_1) f^{n-k}(w_2)$$

であることが分かるから,

$$\begin{aligned}
\exp(tf)(w_1 w_2) &= \sum_{0 \leq n} \frac{t^n}{n!} f^n(w_1 w_2) \\
&= \sum_{0 \leq k} \sum_{0 \leq l} \frac{t^k}{k!} \frac{t^l}{l!} f^k(w_1) f^l(w_2) \\
&= \exp(tf)(w_1) \exp(tf)(w_2)
\end{aligned}$$

と示される. □

Definition 4.3. $0 < n, w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $d_0^{ш}, d_0^*$ を恒等写像として,

$$\begin{aligned}
d_n^{ш}(w) &:= w \,ш\, y^n - (w \,ш\, y^{n-1})y \\
d_n^*(w) &:= w * y^n - (w * y^{n-1})y
\end{aligned}$$

と定義する.

$w \in \mathfrak{H}^1, u \in \{x, y\}$ とすると,

$$d_n^{ш}(wu) = (w \,ш\, y^n)u$$

が成立する. また, $1 \leq k$ とすると,

$$d_n^*(wz_k) = (w * y^n)z_k + (w * y^{n-1})z_{k+1}$$

が成立することが分かる.

Proposition 4.4. $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$w \,ш\, y^n = \sum_{k=0}^{n} d_k^{ш}(w)y^{n-k}$$
$$w * y^n = \sum_{k=0}^{n} d_k^{*}(w)y^{n-k}$$

が成り立つ.

Proof. $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\sum_{k=0}^{n} d_k^{ш}(w)y^{n-k} = wy^n + \sum_{k=1}^{n}(w \,ш\, y^k - (w \,ш\, y^{k-1})y)y^{n-k} = w \,ш\, y^n$$

によって示される. $*$ の方も全く同様である. □

Proposition 4.5. 写像 $\Phi^{ш}, \Phi^*$ を

$$\Phi^{ш} := \sum_{0 \leq n} t^n d_n^{ш}$$
$$\Phi^{*} := \sum_{0 \leq n} t^n d_n^{*}$$

と定めたとき, $\Phi^{ш}, \Phi^*$ は $\mathfrak{H}^1[[t]]$ 上の同型写像であり,

$$\Phi^{ш}(x) = \frac{1}{1-yt}x, \quad \Phi^{ш}(y) = \frac{1}{1-yt}y$$
$$\Phi^{*}(x) = x, \quad \Phi^{*}(y) = y\left(1 + \frac{t}{1-yt}(x+y)\right)$$

と定めることによって $\mathfrak{H}[[t]]$ 上の同型写像に自然に拡張できる.

Proof. $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1, u_1, u_2 \in \{x, y\}$ に対して,

$$\begin{aligned} d_n^{ш}(w_1u_1w_2u_2) &= (w_1u_1w_2 \,ш\, y^n)u_2 \\ &= \sum_{k=0}^{n}(w_1 \,ш\, y^k)u_1(w_2 \,ш\, y^{n-k})u_2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} d_k^{ш}(w_1u_1)d_{n-k}^{ш}(w_2u_2) \end{aligned}$$

より, $\Phi^{ш}$ は $\mathfrak{H}^1$ の同型写像である. $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1, 1 \leq k_1, k_2$ に対して,

$$\begin{aligned} d_n^{*}(w_1z_{k_1}w_2z_{k_2}) &= (w_1z_{k_1}w_2 * y^n)z_{k_2} + (w_1z_{k_1}w_2 * y^{n-1})z_{k_2+1} \\ &= w_1z_{k_1}(w_2 * y^n)z_{k_2} + w_1z_{k_1}(w_2 * y^{n-1})z_{k_2+1} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}((w_1 * y^k)z_{k_1} + (w_1 * y^{k-1})z_{k_1+1})(w_2 * y^{n-k})z_{k_2} \\ &\quad\quad + \sum_{k=1}^{n-1}((w_1 * y^k)z_{k_1} + (w_1 * y^{k-1})z_{k_1+1})(w_2 * y^{n-k-1})z_{k_2+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} d_k^{*}(w_1u_1)d_{n-k}^{*}(w_2u_2) \end{aligned}$$

より, Φ^{*} は $\mathfrak{H}^1$ の同型写像である.

$$\Phi^{ш}(yx^{k-1}) = \frac{1}{1-yt}y\left(\frac{1}{1-yt}x\right)^{k-1}$$
$$\Phi^{*}(yx^{k-1}) = y\left(1 + \frac{t}{1-yt}(x+y)\right)x^{k-1}$$

となることが分かるので,

$$\Phi^{ш}(x) = \frac{1}{1-yt}x, \quad \Phi^{*}(x) = x$$

と定めることによって, $\mathfrak{H}$ の同型写像に拡張できる. □

Proposition 4.6. $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$w \,ш\, \frac{1}{1-yt} = \Phi^{ш}(w)\frac{1}{1-yt}$$
$$w * \frac{1}{1-yt} = \Phi^{*}(w)\frac{1}{1-yt}$$

Proof. 2 つ前の命題より従う. □

Corollary 4.7. $\Delta := (\Phi^{ш})^{-1} \circ \Phi^{*}$ とするとき,

$$w * \frac{1}{1-yt} = \Delta(w) \,ш\, \frac{1}{1-yt}$$

が成立する.

計算により,

$$\Delta(x) = \frac{1}{1+yt}x$$
$$\Delta(x+y) = x+y$$

となることが分かる.

Definition 4.8. 自然数 $0 < n$ に対して, 導分 ∂_n を

$$\partial_n(x) = y(x+y)^{n-1}x, \quad \partial_n(y) = -y(x+y)^{n-1}x$$

で定める.

Proposition 4.9. 同型写像 ϕ を $\phi(x) = y+x, \phi(y) = -y$ とすると, $w \in \mathfrak{H}^1$ に対し,

$$\partial_n(wx) = -\phi(\phi(w) * z_n)x$$

が成り立つ.

Proof. $\phi \circ \phi$ が恒等写像であるから, $w = yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1}$ として,

$$\begin{aligned}
\partial_n(\phi(w)x) &= \partial_n((-y)(x+y)^{k_1-1} \cdots (-y)(x+y)^{k_r-1}x) \\
&= \sum_{i=0}^{r} (-y)(x+y)^{k_1-1} \cdots ((-y)(y+x)^n + (-y)(y+x)^{n-1}(-y))(x+y)^{k_i} \\
&\qquad \cdot (-y)(x+y)^{k_{i+1}} \cdots (-y)(x+y)^{k_r-1}x \\
&\qquad\qquad - (-y)(x+y)^{k_1-1} \cdots (-y)(x+y)^{k_r-1}(-y)(y+x)^{n-1}x \\
&= -\phi(yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1} * z_n)x \\
&= -\phi(w * z_n)x
\end{aligned}$$

であることから従う. □

Proposition 4.10. 同型写像の間の等式

$$\Delta = \exp\left(\sum_{0<n} \frac{\partial_n}{n}(-t)^n\right)$$

が成立する.

Proof. まず, 1 つ前の命題より,

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{0<n} \frac{\partial_n}{n}(-t)^n\right)(wx) &= \phi\left(\phi(w) * \exp_*\left(\sum_{0<n} \frac{(-1)^{n-1}z_n}{n}t^n\right)\right)x \\ &= \phi\left(\phi(w) * \frac{1}{1-yt}\right)x\end{aligned}$$

であるから, $w = 1_{\mathfrak{H}}$ として,

$$\exp\left(\sum_{0<n} \frac{\partial_n}{n}(-t)^n\right)(x) = \frac{1}{1+yt}x = \Delta(x)$$

また,

$$\Delta(x+y) = x+y = \exp\left(\sum_{0<n} \frac{\partial_n}{n}(-t)^n\right)(x+y)$$

であるから, 生成元 $x, x+y$ での値が等しい. よって, 等号が成り立つ. $\square$

Theorem 4.11 (導分関係式; Ihara-Kaneko-Zagier [IKZ, Corollary 6])**.** $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して, 以下が成り立つ.

(i) $\zeta(w) = \zeta(\Delta(w))$

(ii) 自然数 $0 < n$ と $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\zeta(\partial_n(w)) = 0$$

が成り立つ.

Proof. (i) は正規化複シャッフル関係式より, $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\zeta(w) = \zeta^{ш}\left(w \,ш\, \frac{1}{1-yt}\right) = \zeta^{ш}\left(w * \frac{1}{1-yt}\right) = \zeta^{ш}\left(\Delta(w) \,ш\, \frac{1}{1-yt}\right) = \zeta(\Delta(w))$$

より従う.

$$\sum_{0<n} \frac{\zeta(\partial_n(w))}{n}(-t)^n = \zeta(\ln\Delta)(w) = \sum_{0<n} \frac{(-1)^{n-1}\zeta((\Delta-1)^n(w))}{n} = 0$$

より, t^n の係数を考えて, $\zeta(\partial_n(w)) = 0$ が従う. $\square$

これまでの証明から, 導分関係式は正規化複シャッフル関係式から代数的に導かれることが分かる.

4.2 Ohno 関係式

Definition 4.12. 同型写像 σ を

$$\sigma(x) = x, \quad \sigma(y) = y\frac{1}{1+xt}$$

で定める.

Proposition 4.13. 以下の等式が成り立つ.

$$\Delta = \tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$$

Proof. 計算により,

$$(\tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1})(x) = \frac{1}{1+yt}x = \Delta(x)$$
$$(\tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1})(x+y) = x+y = \Delta(x+y)$$

であることから従う. $\square$

Theorem 4.14 (Ohno 関係式; Ohno [O, Theorem 1])**.** $0 \le n$ を非負整数とする. 許容インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ とその双対インデックス $\boldsymbol{k}^\dagger = (l_1, \ldots, l_s)$ に対して,

$$\sum_{\substack{0 \le e_1, \ldots, e_r \\ e_1 + \cdots + e_r = n}} \zeta(k_1 + e_1, \ldots, k_r + e_r) = \sum_{\substack{0 \le e_1, \ldots, e_s \\ e_1 + \cdots + e_s = n}} \zeta(l_1 + e_1, \ldots, l_s + e_s)$$

が成り立つ.

Proof. 前の命題を用いて, 導分関係式と双対性により, $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\zeta(\sigma(\tau - 1)(w)) = \zeta((\tau \circ \sigma \circ \tau - \sigma)(w)) = \zeta((\Delta - 1)(\sigma(w)) = 0$$

よって, $\zeta(\sigma(w)) = \zeta(\sigma \circ \tau(w))$ である.

$$\zeta(\sigma(yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1})) = \sum_{0 \le n} (-t)^n \sum_{\substack{0 \le e_1, \ldots, e_r \\ e_1 + \cdots + e_r = n}} \zeta(k_1 + e_1, \ldots, k_r + e_r)$$

であることから $w = yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1}$ として定理が示される. $\square$

新たに記号 $(k_1,\dots,k_r)\oplus(e_1,\dots,e_r) := (k_1+e_1,\dots,k_r+e_r),\quad |(e_1,\dots,e_r)| := e_1+\cdots+e_r$ を導入することによって, Ohno 関係式は,

$$\sum_{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})},|\boldsymbol{e}|=n}\zeta(\boldsymbol{k}\oplus\boldsymbol{e})=\sum_{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}^\dagger)},|\boldsymbol{e}|=n}\zeta(\boldsymbol{k}^\dagger\oplus\boldsymbol{e})$$

と簡潔に表すことができる. Ohno 関係式の証明には双対性が用いられているため, 正規化複シャッフル関係式に含まれているかどうかは分からないが, 1 つ前の命題から,

$$\sum_{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})}}\zeta(\boldsymbol{k}\oplus\boldsymbol{e})=\sum_{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}^\dagger)}}\zeta((\boldsymbol{k}^\dagger\oplus\boldsymbol{e})^\dagger)$$

は導分関係式と同値であるため, 正規化複シャッフル関係式に含まれていることが分かる.

Definition 4.15. $I(k,r)$ で重さ k, 深さ r のインデックス全体を表し, $I_0(k,r)$ で重さ k, 深さ r の許容インデックス全体を表すとする.

Ohno 関係式において, $\boldsymbol{k}$ を深さ 1 のインデックスとすると, 以下が得られる.

Corollary 4.16 (和公式; Granville [G, Gr, Proposition]). $0<r<k$ に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)}\zeta(\boldsymbol{k})=\zeta(k)$$

が成り立つ.

和公式は多重ゼータ値において最もシンプルな関係式であり, 様々な証明が知られている.

4.3 Kaneko-Sakata 型和公式

この項では, Kaneko-Sakata の和公式の一般化である Murahara-Sakata の和公式の証明を与える. ここで与える証明は Murahara-Sakata の証明と同様である.

Definition 4.17 (縮約インデックス). インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1}\cdots(y+x)x^{k_r-1}$$

を展開して現れる項に対応するインデックスを縮約インデックスという. $\boldsymbol{l}$ が $\boldsymbol{k}$ の縮約インデックスであることを, $\boldsymbol{l}\preceq\boldsymbol{k}$ と表す.

具体例を挙げると,$(2,3,4)$ の縮約インデックスは

$$(2,3,4),(2,7),(5,4),(9)$$

の 4 つである.

Theorem 4.18 (Murahara-Sakata の和公式; Murahara-Sakata [MS, Theorem 1.2])**.** 正整数 $0<r\le n$ とインデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{e}\in I(n,r)}\zeta(\{1\}^{e_1-1},k_1+1,\dots,\{1\}^{e_r-1},k_r+1)=\sum_{\boldsymbol{k}\preceq\boldsymbol{l}}(-1)^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})-r}\sum_{\boldsymbol{e}\in I(n,\mathrm{dep}(\boldsymbol{l}))}\zeta(\boldsymbol{l}\oplus\boldsymbol{e})$$

が成り立つ.ただし, $\sum_{\boldsymbol{k}\preceq\boldsymbol{l}}$ は $\boldsymbol{k}$ を縮約インデックスに持つインデックス $\boldsymbol{l}$ 全体の和を表す.

Proof. $u:=-t$ として, 準同型写像 α を $\alpha(x)=(1-yu)x,\alpha(y)=yxu$ と定めると,

$$(\sigma\circ\alpha)(x)=x-y\frac{xu}{1-xu},\quad(\sigma\circ\alpha)(y)=y\frac{xu}{1-xu}$$
$$(\tau\circ\sigma\circ\tau\circ\alpha)(x)=x,\quad(\tau\circ\sigma\circ\tau\circ\alpha)(y)=\frac{yu}{1-yu}x$$

が成り立つ.よって, 導分関係式より

$$\zeta((\tau\circ\sigma\circ\tau\circ\alpha)(w))=\zeta((\sigma\circ\alpha)(w))$$

であるから, $w=yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}$ として

$$\zeta((\tau\circ\sigma\circ\tau\circ\alpha)(w))=\frac{yu}{1-yu}x^{k_1}\cdots\frac{yu}{1-yu}x^{k_r}$$
$$\zeta((\sigma\circ\alpha)(w))=\sum_{\boldsymbol{k}\preceq\boldsymbol{l}}(-1)^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})-r}y\frac{xu}{1-xu}x^{l_1-1}\cdots y\frac{xu}{1-xu}x^{l_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}-1}$$

であるから, u^n の係数を比較して定理を得る. □

この関係式の特徴は, 右辺に現れるインデックスの成分が全て 2 以上であるということである.一般にインデックス $\boldsymbol{k}$ に対して, 2 以上の成分の個数を高さといい, $\mathrm{ht}(\boldsymbol{k})$ で表す.全てのインデックスの成分が 2 以上のインデックスのことを高さ最大のインデックスという.この関係式はさらに左辺の高さが一定であるところも興味深いところであり, 多重ゼータ値において, 高さという値も重要であることを示唆している.証明において用いられている α という写像は同型写像ではないので, Murahara-Sakata の和公式は一般に導分関係式と同値ではないと考えられる.Murahara-Sakata の和公式において, $r=1$ とすることによって, 以下の等式を得る.

Corollary 4.19 (Kaneko-Sakata の和公式 [KS, Theorem 1.1])**.** 自然数 $0 < a, b$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\zeta(\{1\}^{a-1}, b+1) = \sum_{0<r} (-1)^{r-1} \sum_{\substack{\boldsymbol{a} \in I(a,r) \\ \boldsymbol{b} \in I(b,r)}} \zeta(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b})$$

これは高さが 1 の多重ゼータ値を高さ最大の多重ゼータ値で表す明示式を与えているが, 高さが 2 の多重ゼータ値を一般に高さ最大の多重ゼータ値で表す明示式はまだ知られていないと思われる.

4.4 Ohno-Zagier の関係式

Proposition 4.20. $\mathbb{C}[[t]]$ における等式

$$\exp\left(\sum_{0<k} \frac{\zeta_{<n}(k)}{k} t^k\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{k}\right)^{-1}$$

が成り立つ.

Proof.

$$\exp_*\left(\sum_{0<k} \frac{(-1)^{k-1} z_k}{k} t^k\right) = \sum_{0 \leq k} y^k t^k$$

に $\zeta_{<n}$ を作用させて

$$\exp\left(\sum_{0<k} \frac{(-1)^{k-1} \zeta_{<n}(k)}{k} t^k\right) = \sum_{0 \leq k} \zeta_{<n}(\{1\}^k) t^k = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{t}{k}\right)$$

を得る. t を $-t$ に置き換えて逆数を考えることによって示される. □

Theorem 4.21 (Ohno-Zagier の関係式 [OZ])**.** α, β を $\alpha + \beta = u + v, \alpha\beta = w$ を満たすものとして定める. $\mathbb{C}[[u, v, w]]$ における等式

$$\begin{aligned} &\sum_{0<k,r,s} \left(\sum_{\boldsymbol{k} \in I_0(k,r,s)} \zeta(\boldsymbol{k})\right) u^{k-r-s} v^{r-s} w^{s-1} \\ &= \frac{1}{uv - w} \left(1 - \exp\left(\sum_{0<n} \frac{\zeta(n)}{n} (u^n + v^n - \alpha^n - \beta^n)\right)\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $I_0(k, r, s)$ は重さ k, 深さ r, 高さ s の許容インデックス全体の集合を表す.

Proof. 前の命題より,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{uv-w}\left(1-\exp\left(\sum_{0<k}\frac{\zeta_{<n}(k)}{k}(u^k+v^k-\alpha^k-\beta^k)\right)\right)\\
&=\frac{1}{uv-w}\left(1-\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k-\alpha)(k-\beta)}{(k-u)(k-v)}\right)\\
&=\frac{1}{uv-w}\left(1-\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{uv-w}{(k-u)(k-v)}\right)\right)\\
&=\sum_{0<r}(w-uv)^{r-1}\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<n}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(n_i-u)(n_i-v)}\\
&=\sum_{0<s\leq r}\binom{r-1}{s-1}w^{s-1}(-uv)^{r-s}\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<n}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(n_i-u)(n_i-v)}\\
&=\sum_{0<s\leq r}\left((-1)^{r-s}\binom{r-1}{s-1}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,r)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,r)}}\zeta_{<n}(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})\right)u^{a-s}v^{b-s}w^{s-1}
\end{aligned}
$$

ここで, $n\to\infty$ とすることによって,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{uv-w}\left(1-\exp\left(\sum_{0<k}\frac{\zeta(k)}{k}(u^k+v^k-\alpha^k-\beta^k)\right)\right)\\
&=\sum_{0<s\leq r,a,b}\left((-1)^{r-s}\binom{r-1}{s-1}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,r)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,r)}}\zeta(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})\right)u^{a-s}v^{b-s}w^{s-1}
\end{aligned}
$$

を得る. Murahara-Sakata の和公式より,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(a+b,a,s)}\zeta(\boldsymbol{k})&=\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,s)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,s)}}\zeta(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\dots,\{1\}^{a_s-1},b_s+1)\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}\in I(b,s)}\sum_{\boldsymbol{k}\preceq\boldsymbol{b}}(-1)^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{b})-s}\sum_{\boldsymbol{a}\in I(a,\mathrm{dep}(\boldsymbol{b}))}\zeta(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})\\
&=\sum_{s\leq r}(-1)^{r-s}\binom{r-1}{s-1}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,r)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,r)}}\zeta(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

ここで, 最後の等号は $r := \mathrm{dep}(\boldsymbol{b})$ と置き換えて, 深さ r のインデックスの深さ s の縮約インデックスの個数が $yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1}\cdots(y+x)x^{k_r-1}$ の $r-1$ 個の $x+y$ から y を $s-1$ 個選ぶ組合せの数に等しく, $\binom{r-1}{s-1}$ で与えられることから分かる. よって,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{uv-w}\left(1-\exp\left(\sum_{0<k}\frac{\zeta(k)}{k}(u^k+v^k-\alpha^k-\beta^k)\right)\right)\\
&=\sum_{0<s\le r,a,b}\left((-1)^{r-s}\binom{r-1}{s-1}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,r)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,r)}}\zeta(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})\right)u^{a-s}v^{b-s}w^{s-1}\\
&=\sum_{0<s\le a,b}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(a+b,a,s)}\zeta(\boldsymbol{k})\right)u^{a-s}v^{b-s}w^{s-1}\\
&=\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta(\boldsymbol{k})\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}
\end{aligned}
$$

と示される. □

この関係式は, 重さ, 深さ, 高さを固定した多重ゼータ値の和が Riemann ゼータ値で表されることを示している. 和公式は重さと深さを固定した和が Riemann ゼータ値になるという定理だったから, それの精密化を与えていることになる. 上の証明は実はより代数的に成り立っており, Ohno-Zagier の関係式を調和関係式によって展開したものが Murahara-Sakata の和公式に含まれていることが分かる. 次の公式は, 重さと高さを固定した場合である. これは Ohno-Zagier の関係式を $u+v=0$ として w を $-w^2$ に置き換えて得られる.

Corollary 4.22 (Le-Murakami の関係式 [LM1, LM2])**.** $\mathbb{C}[[u,w]]$ における等式

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<k,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,*,s)}(-1)^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})}\zeta(\boldsymbol{k})\right)u^{k-2s}w^{2s-2}\\
&\qquad=\frac{1}{u^2-w^2}\left(1-\exp\left(\sum_{0<n}\frac{\zeta(2n)}{n}(u^{2n}-w^{2n})\right)\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで, $I_0(k,*,s)$ は重さ k, 高さ s の許容インデックス全体の集合を表す.

後で見るように, $\zeta(2n)$ は π^{2n} の有理数倍であるから,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,*,s)} (-1)^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})}\zeta(\boldsymbol{k})$$

は π^k の有理数倍であることが分かる. これは k が奇数の場合は双対性によって打ち消し合うため, 0 になる. Ohno-Zagier の関係式の高さ 1 の場合として, 以下の公式が得られる.

Corollary 4.23 (Aomoto-Drinfel'd の公式 [A, D])**.**

$$\sum_{0<n,m} \zeta(\{1\}^{n-1}, m+1)u^n v^m = 1 - \exp\left(\sum_{0<n} \frac{\zeta(n)}{n}(u^n + v^n - (u+v)^n)\right)$$

これは, 高さが 1 の多重ゼータ値が Riemann ゼータ値で表されるという結果である. Ohno-Zagier の関係式の証明の途中に現れた等式

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(a+b,a,s)} \zeta(\boldsymbol{k}) &= \sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,s)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,s)}} \zeta(\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \ldots, \{1\}^{a_s-1}, b_s+1)\\ &= \sum_{s\le r} (-1)^{r-s}\binom{r-1}{s-1} \sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,r)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,r)}} \zeta(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

は Murahara-Sakata の和公式から導かれており, a, b に関して対称的であるから, 以下の系が得られる.

Corollary 4.24. 重さ, 深さ, 高さを固定した多重ゼータ値の和の双対性は導分関係式に含まれている. 特に高さ 1 の多重ゼータ値の双対性は導分関係式に含まれている.

4.5 シャッフル正規化和公式とその一般化

Definition 4.25 (Hoffman 双対)**.** $\mathfrak{H}$ における同型写像 η_0 を $\eta_0(x) = y, \eta_0(y) = x$ によって定め, $yw \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $\eta(yw) := y\eta_0(w)$ によって定める. η を Hoffman 双対という. インデックスに対しては, $\boldsymbol{k}^\vee := \eta(\boldsymbol{k})$ と書く.

Proposition 4.26. $\mathfrak{H}$ の同型写像 ρ を $\rho(x) = x, \rho(y) = \frac{y}{1-yt}$ によって定めると, $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$(\eta\circ\sigma\circ\eta)(w) \mathbin{ш} \frac{1}{1-yt} = \rho(w)$$

が成り立つ.

Proof. まず, $w \in \mathfrak{H}$ に対して,

$$(\eta \circ \sigma \circ \eta)(yw) = y\frac{1}{1+yt}(\eta_0 \circ \sigma \circ \eta_0)(w)$$

であり, $(\eta_0 \circ \sigma \circ \eta_0)(x) = x\frac{1}{1+yt}, (\eta \circ \sigma \circ \eta)(y) = y$ が成り立つ. よって, 新たに同型写像 f を $f(x) = \frac{1}{1+yt}x, f(y) = y$ で定めると,

$$y\frac{1}{1+yt}(\eta_0 \circ \sigma \circ \eta_0)(w) = f(yw)\frac{1}{1+yt}$$

よって,

$$\begin{aligned}(\eta \circ \sigma \circ \eta)(yw) ш \frac{1}{1-yt} &= \Phi^{ш}\left(f(yw)\frac{1}{1+yt}\right)\frac{1}{1-yt} \\ &= (\Phi^{ш} \circ f)(yw)\end{aligned}$$

であるから, x, y での行き先を見ることによって $\rho = \Phi^{ш} \circ f$ が従うことから示される. □

Theorem 4.27 (一般化されたシャッフル正規化和公式)**.** 非負整数 n とインデックス $\boldsymbol{k}$ に対して,

$$\sum_{\substack{0 \le e_1, \ldots, e_r \\ |\boldsymbol{e}|=n}} \zeta^{ш}((\boldsymbol{k}^\vee \oplus \boldsymbol{e})^\vee) = (-1)^n \sum_{\substack{0 \le e_1, \ldots, e_r \\ |\boldsymbol{e}|=n}} \zeta^{ш}(\{1\}^{e_1}, k_1, \ldots, \{1\}^{e_r}, k_r)$$

が成り立つ.

Proof. 一つ前の命題より,

$$\zeta^{ш}((\eta \circ \sigma \circ \eta)(w)) = \zeta^{ш}\left((\eta \circ \sigma \circ \eta)(w) ш \frac{1}{1-yt}\right) = \zeta^{ш}(\rho(w))$$

だから, $w = yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1}$ として t^n の係数を比較することにより示される. □

$\boldsymbol{k}$ を深さ 1 とすることによって通常のシャッフル正規化和公式が得られる.

Corollary 4.28 (シャッフル正規化和公式; Kaneko-Sakata [KS, Theorem 1.2])**.** 正整数 k, r に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I(k+r, r)} \zeta^{ш}(\boldsymbol{k}) = (-1)^{r-1}\zeta(\{1\}^{r-1}, k+1)$$

が成り立つ.

4.6 二重 Ohno 関係式

Definition 4.29. $\mathfrak{H}$ 上の同型 σ_u, Δ_u と反自己同型 τ_u を

$$\begin{aligned}\sigma_u(x) &= x, \quad \sigma_u(y) = y\frac{1}{1-xu}\\ \Delta_u(x) &= \frac{1}{1-yu}x, \quad \Delta_u(y) = \frac{y}{1-yu}(1-(x+y)u)\\ \tau_u(x) &= y\frac{1}{1+yxu}, \quad \tau_u(y) = (1+yxu)x\end{aligned}$$

によって定める.

これまで, 単に σ, Δ と書いていたものは, 上の記号では σ_{-t}, Δ_{-t} と表される.

Proposition 4.30. 同型写像の間の等式

$$\Delta_s\Delta_t = \tau\sigma_s\sigma_t\tau_{st}\sigma_s^{-1}\sigma_t^{-1}$$

が成り立つ. ただし, 積は写像の合成を表すものとする.

Proof. まず,

$$\Delta_s\Delta_t(x) = \frac{1}{1-y(s+t)+y(x+y)st}x = (\tau\sigma_s\sigma_t\tau_{st}\sigma_s^{-1}\sigma_t^{-1})(x)$$

である. 次に, $\Delta_s\Delta_t(x+y) = x+y$ であり,

$$\begin{aligned}&(\tau\sigma_s\sigma_t\tau_{st}\sigma_s^{-1}\sigma_t^{-1})(x+y)\\ &= \tau\sigma_s\sigma_t\left(y\frac{1}{1+yxst} + \left(1-y\frac{s}{1+yxst}\right)\left(1-y\frac{t}{1+yxst}\right)(1+yxst)x\right)\\ &= \tau\sigma_s\sigma_t(x+y(1-xs)(1-xt))\\ &= x+y\end{aligned}$$

であるから, 等号が示される. □

Theorem 4.31 (拡張された二重 Ohno 関係式; Hirose-Sato-Seki [HSS])**.** $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\zeta(\sigma_s\sigma_t(1-\tau_{st})(w)) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 1 つ前の命題と導分関係式と双対性によって,

$$\begin{aligned}\zeta(\sigma_s\sigma_t(w)) &= \zeta(\Delta_s\Delta_t\sigma_s\sigma_t(w)) \\ &= \zeta(\tau\sigma_s\sigma_t\tau_{st}(w)) \\ &= \zeta(\sigma_s\sigma_t\tau_{st}(w))\end{aligned}$$

と示される. □

反自己同型 $\widetilde{\tau}_u$ を

$$\widetilde{\tau}_u(x) = \frac{1}{1+yxu}y, \widetilde{\tau}_u(y) = x(1+yxu)$$

としたとき, $w \in \mathfrak{H}$ に対して,

$$\tau_u(ywx) = y\widetilde{\tau}_u(w)x$$

が成り立つことが分かる. よって, 拡張された二重 Ohno 関係式は,

$$\zeta(\sigma_s\sigma_t y(1-\widetilde{\tau}_{st})(w)x) = 0$$

と書き直すことができる.

$$\widetilde{\tau}_u(xy) = yx, \quad \widetilde{\tau}_u(yx) = xy$$

が成り立つことから, xy, yx のいくつかの積によって生成される単項式 w に対して,

$$y\widetilde{\tau}(w)x = y\tau(w)x = \tau(ywx)$$

が成り立つ. このような ywx に対応するインデックスを BBBL 型インデックスということにすると, 以下が従うことが分かる.

Corollary 4.32 (二重 Ohno 関係式; Hirose-Murahara-Onozuka-Sato [HMOS])**.** 非負整数 n, m と BBBL 型インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して,

$$\sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})} \\ 0\le f_1,\dots,f_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})} \\ |\boldsymbol{e}|=n, |\boldsymbol{f}|=m}} \zeta(\boldsymbol{k}\oplus\boldsymbol{e}\oplus\boldsymbol{f}) = \sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}^\dagger)} \\ 0\le f_1,\dots,f_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}^\dagger)} \\ |\boldsymbol{e}|=n, |\boldsymbol{f}|=m}} \zeta(\boldsymbol{k}^\dagger\oplus\boldsymbol{e}\oplus\boldsymbol{f})$$

Ohno 和を $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$O(w;t) := \sum_{0\le n} t^n \zeta(\sigma_t(w))$$

によって導入すると, Ohno 関係式は Ohno 和の双対性

$$O(\boldsymbol{k};t)=O(\boldsymbol{k}^{\dagger};t)$$

と考えることができる. Ohno 和が満たす関係式族という観点からは, 二重 Ohno 関係式は, Ohno 和が BBBL 型インデックスに対して Ohno 関係式を満たすということを意味しているのである.

5 Kawashima 関係式

5.1 Landen 型接続公式

Definition 5.1. インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と $|z|<1$ に対して,

$$\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}(z):=\sum_{0<n_1\leq\cdots\leq n_r}\frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

と定義する.

多重ポリログの反復積分表示から, $\mathrm{Li}^{\star}$ は反復積分表示

$$\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}(z)=I_z(yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1}\cdots(y+x)x^{k_r-1})$$

を持つ. これによって, $|z|<1$ の外側へと解析接続できる.

Theorem 5.2 (Landen 型接続公式)**.** 複素数 z に対して,

$$\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}(z)=-\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}^{\vee}}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Proof. 反復積分表示

$$\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}(z)=I_z(yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1}\cdots(y+x)x^{k_r-1})$$

において, 変数変換 $t\to\frac{t}{t-1}$ を行うと, $x\to x+y, y\to -y$ となって示される. □

これは同型写像 $\phi(x)=x+y,\phi(y)=-y$ を用いて,

$$\mathrm{Li}_{w}(z)=\mathrm{Li}_{\phi(w)}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

と表すこともできる.

Theorem 5.3 (Hoffman の恒等式; Hoffman [H2]). インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と非負整数 n に対して,

$$\zeta^\star_{\le n}(\boldsymbol{k}) := \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r\le n} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

とする. このとき,

$$\zeta^\star_{\le N}(\boldsymbol{k}^\vee) = -\sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r\le N} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{(-N)_{n_r}}{n_r!}$$

ここで, $(x)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$ は Pochhammer 記号である.

Proof. Landen 型接続公式の両辺に $\frac{1}{1-z}$ を掛けて z^N の係数を比較することにより示される. □

5.2 多重 Hurwitz ゼータ値とその正規化

Definition 5.4 (多重 Hurwitz ゼータ値). インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $0 \le t$ に対して, 多重 Hurwitz ゼータ値を

$$\zeta(\boldsymbol{k}; t) := \sum_{0\le n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{(n_1+t)^{k_1}\cdots(n_r+t)^{k_r}}$$

$$\zeta^\star(\boldsymbol{k}; t) := \sum_{0\le n_1\le\cdots\le n_r} \frac{1}{(n_1+t)^{k_1}\cdots(n_r+t)^{k_r}}$$

多重ゼータ値の場合と全く同様に $\zeta(\boldsymbol{k}; t)$ が調和関係式を満たすことが分かるので, 自然に調和正規化が考えられる.

Proposition 5.5 (調和正規化多項式). $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, 以下の条件を満たす T の多項式 $\zeta^*(w; t; T)$ が一意に存在する.

(i) $\zeta^*(y; t; T) = T + \sum_{0\le n}\left(\frac{1}{n+t} - \frac{1}{n+1}\right)$
(ii) $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して, $\zeta^*(w; t; T) = \zeta(w; t)$
(iii) $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $\zeta^*(w_1; t; T)\zeta^*(w_2; t; T) = \zeta^*(w_1 * w_2; t; T)$

この $\zeta^*(w; t; T)$ を調和正規化多項式という.

$$\zeta^{*,\star}(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}; t; T) := \zeta^*(yx^{k_1-1}(x+y)x^{k_2-1}\cdots(x+y)x^{k_r-1}; t; T)$$

によって $\zeta^{*,\star}$ の方も定義する.

Proposition 5.6 (多重調和和の漸近展開)**.** Hurwitz 型の多重調和和をインデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$\zeta_{<n}(\boldsymbol{k};t):=\sum_{0\le n_1<\cdots<n_r<n}\frac{1}{(n_1+t)^{k_1}\cdots(n_r+t)^{k_r}}$$

によって定義する. このときある定数 $0<m$ があって, $N\to\infty$ において

$$\zeta_{<N}(\boldsymbol{k};t)=\zeta^*(\boldsymbol{k};t;\zeta_{<N}(1))+O\left(\frac{\zeta_{<N}(1)^m}{N}\right)$$

が成り立つ.

これらの証明は多重ゼータ値の場合と全く同様であるから省略する.

Proposition 5.7 (antipode 関係式)**.** 正整数 r とインデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\zeta_{<n}(k_1,\dots,k_i)\zeta^\star_{<n}(k_r,\dots,k_{i+1})=0$$
$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\zeta^\star_{<n}(k_1,\dots,k_i)\zeta_{<n}(k_r,\dots,k_{i+1})=0$$

が成り立つ. ここで, $(k_1,\dots,k_i)$ は $i=0$ のときに空インデックスに, $(k_r,\dots,k_{i+1})$ は $i=r$ のときに空インデックスを表すものとする.

Proof. 1 つ目の式は,

$$\begin{aligned}\zeta_{<n}(k_1,\dots,k_r)&=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<n}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\\&=\zeta_{<n}(k_1,\dots,k_{r-1})\zeta_{<n}(k_r)-\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_{r-1}<n\\0<n_r\le n_{r-1}}}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\\&=\zeta_{<n}(k_1,\dots,k_{r-1})\zeta_{<n}(k_r)-\zeta_{<n}(k_1,\dots,k_{r-2})\zeta^\star_{<n}(k_r,k_{r-1})\\&\qquad-\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_{r-2}<n\\0<n_r\le n_{r-1}\le n_{r-2}}}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\\&=\cdots\\&=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\zeta_{<n}(k_1,\dots,k_i)\zeta^\star_{<n}(k_r,\dots,k_{i+1})\qquad=0\end{aligned}$$

のように示される. 2 つ目の式も全く同様である. □

Proposition 5.8. インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$\zeta^{\star}_{\le n}(\boldsymbol{k})=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\zeta^{\star,*}(k_1,\dots,k_i;T)\zeta^{*}(k_r,\dots,k_{i+1};n+1;T)$$

Proof. $0<k<N$ を $0<k\le n$ と $n<k<N$ に分けることによって,

$$\zeta^{\star}_{<N}(\boldsymbol{k})=\sum_{i=0}^{r}\zeta^{\star}_{\le n}(k_1,\dots,k_i)\zeta^{\star}_{<N-n-1}(k_{i+1},\dots,k_r;n+1)$$

の $N\to\infty$ の漸近展開を考えることによって,

$$\zeta^{*,\star}(\boldsymbol{k};T)=\sum_{i=0}^{r}\zeta^{\star}_{\le n}(k_1,\dots,k_i)\zeta^{*,\star}(k_{i+1},\dots,k_r;n+1;T)$$

antipode 関係式によって, これは

$$\zeta^{\star}_{\le n}(\boldsymbol{k})=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\zeta^{\star,*}(k_1,\dots,k_i;T)\zeta^{*}(k_r,\dots,k_{i+1};n+1;T)$$

と書き直すことができる. □

Proposition 5.9. T を定数としたとき, インデックス $\boldsymbol{k}$ と $\mathrm{Im}(t)\to\pm\infty$ において, ある定数 $0<m$ が存在して,

$$\zeta(\boldsymbol{k};t;T)=O(\ln^m t)$$

が成り立つ.

Proof. $\boldsymbol{k}$ が許容インデックスの場合は 0 に収束することと, $\zeta^*(1;t;T)$ が

$$\zeta^*(1;t;T)=O(\ln t)$$

となることから分かる. これはディガンマ関数の漸近展開としてよく知られたものである. □

5.3 Kaneko-Xu-Yamamoto の定理

Theorem 5.10 (Kaneko-Xu-Yamamoto の定理; [KXY, Theorem 3.1])**.** $\boldsymbol{k}^{\vee}=(l_1,\dots,l_s)$ とする. $\mathbb{C}[[u]]$ における等式

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_s}\frac{1}{n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}\frac{(u)_{n_s}}{n_s!}=-\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\zeta^{*,\star}(k_1,\dots,k_i;T)\zeta^{*}(k_{i+1},\dots,k_r;1-u;T)$$

が成立する.

Proof. u を 1 より小さい実数とすると, 両辺は収束する.

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin \pi u} \sum_{0<n_1<\cdots<n_s} \frac{1}{n_1^{l_1} \cdots n_s^{l_s}} \frac{(u)_{n_s}}{n_s!} &= \int_0^1 \mathrm{Li}^\star_{\boldsymbol{k}^\vee}(t) t^{u-1}(1-t)^{-u}\, dt \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{u-1}\mathrm{Li}^\star_{\boldsymbol{k}^\vee}\left(\frac{t}{1+t}\right)}{1+t}\, dt \\ &= -\int_0^\infty \frac{t^{u-1}\mathrm{Li}^\star_{\boldsymbol{k}}(-t)}{1+t}\, dt \\ &= -\int_0^\infty t^{u-1} \sum_{0\le n} \zeta^\star_{\le n}(\boldsymbol{k})(-t)^n\, dt\end{aligned}$$

ここで,

$$\varphi(s) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \zeta^{\star,*}(k_1, \ldots, k_i; T)\zeta^*(k_{i+1}, \ldots, k_r; 1+s; T)$$

とすると, $\varphi(n) = \zeta^\star_{\le n}(\boldsymbol{k})$ であり, $0 < \delta < 1$ を取ると $-\delta < \mathrm{Re}(s)$ において $\varphi(s)$ は対数関数の累乗程度で抑えられることから, Ramanujan's master theorem の仮定を満たすので, $0 < \mathrm{Re}(u) < \delta$ において,

$$\int_0^\infty t^{u-1} \sum_{0\le n} \zeta^\star_{\le n}(\boldsymbol{k})(-t)^n\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi u}\varphi(-u)$$

となる.

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_s} \frac{1}{n_1^{l_1} \cdots n_s^{l_s}} \frac{(u)_{n_s}}{n_s!} = -\varphi(-u)$$

の両辺は $u = 0$ において正則なので, 等式が成り立つことが分かる. □

5.4 多重調和和の線形独立性

Theorem 5.11 (多重調和和の線形独立性)**.** 十分大きな N を固定する. インデックス全体の集合を I として, 各 $\boldsymbol{k} \in I$ に対して複素数係数多項式 $c_{\boldsymbol{k}}(t)$ があり, 有限個のインデックスを除いて $c_{\boldsymbol{k}} = 0$ であるとする. 全ての $N < n$ に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I} c_{\boldsymbol{k}}(n)\zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) = 0$$

が成り立っているとする. このとき, 全ての $\boldsymbol{k} \in I$ に対して, $c_{\boldsymbol{k}}(n) = 0$ が成り立つ.

Proof. $c_{\boldsymbol{k}} \neq 0$ である最大の深さを r として, m を深さ最大の $c_{\boldsymbol{k}}$ の次数の最大値とする. (r, m) に関する二重帰納法を用いる. 深さが最大ではないインデックスにおいては $c_{\boldsymbol{k}}$ に有理関数も許すとして,

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I} c_{\boldsymbol{k}}(n) \zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) = 0$$

ならば, $c_{\boldsymbol{k}}(n) = 0$ が $(r, m-1)$ の場合に成り立っているする. (r, m) の場合を示す.

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I} c_{\boldsymbol{k}}(n) \zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) = 0$$

を $n+1$ の場合と差を考えることにより, $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して, $\boldsymbol{k}_- := (k_1, \ldots, k_{r-1})$ として

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\boldsymbol{k} \in I} c_{\boldsymbol{k}}(n+1) \zeta_{<n+1}(\boldsymbol{k}) - \sum_{\boldsymbol{k} \in I} c_{\boldsymbol{k}}(n) \zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k} \in I} (c_{\boldsymbol{k}}(n+1) - c_{\boldsymbol{k}}(n)) \zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) + \sum_{\boldsymbol{k} \in I} c_{\boldsymbol{k}}(n+1)(\zeta_{<n+1}(\boldsymbol{k}) - \zeta_{<n}(\boldsymbol{k})) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k} \in I} (c_{\boldsymbol{k}}(n+1) - c_{\boldsymbol{k}}(n)) \zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) + \sum_{\boldsymbol{k} \in I - \{\varnothing\}} c_{\boldsymbol{k}}(n+1) \zeta_{<n}(\boldsymbol{k}_-) \frac{1}{n^{k_r}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k} \in I} \left(c_{\boldsymbol{k}}(n+1) - c_{\boldsymbol{k}}(n) + \sum_{0<h} \frac{c_{(\boldsymbol{k}, h)}(n+1)}{n^h} \right) \zeta_{<n}(\boldsymbol{k})
\end{aligned}$$

である. 深さ r の $\boldsymbol{k}$ に対して, 多項式 $c_{\boldsymbol{k}}(n+1) - c_{\boldsymbol{k}}(n)$ は $c_{\boldsymbol{k}}$ より次数が 1 小さいことから, $(r, m-1)$ の場合に帰着しているので, 任意のインデックスに対して,

$$c_{\boldsymbol{k}}(n+1) - c_{\boldsymbol{k}}(n) + \sum_{0<h} \frac{c_{(\boldsymbol{k}, h)}(n+1)}{n^h} = 0$$

であることが分かる. $\boldsymbol{k}$ が深さ r のとき,

$$c_{\boldsymbol{k}}(n+1) - c_{\boldsymbol{k}}(n) = 0$$

であり, 多項式であるから $c_{\boldsymbol{k}}$ は定数である. $\boldsymbol{k}$ が深さ $r-1$ のとき,

$$c_{\boldsymbol{k}}(n+1) - c_{\boldsymbol{k}}(n) + \sum_{0<h} \frac{c_{(\boldsymbol{k}, h)}(n+1)}{n^h} = 0$$

である. $c_{(\boldsymbol{k}, h)}$ は定数であるが, これらのどれか 1 つが 0 でないとすると, $c_{\boldsymbol{k}}$ は漸化式から有理関数ではありえない. よって, 全ての深さ r のインデックス $(\boldsymbol{k}, h)$ に対する $c_{(\boldsymbol{k}, h)}$ が 0 であることが分かり, 深さ $r-1$ の $\boldsymbol{k}$ に対する.

$$c_{\boldsymbol{k}}(n+1) - c_{\boldsymbol{k}}(n) = 0$$

を得る．よって $c_{\boldsymbol{k}}$ は定数である．次に深さ $r-2$ の場合を考えることにより, 全く同様の議論により深さ $r-1$ の $\boldsymbol{k}$ に対して $c_{\boldsymbol{k}}=0$ が分かり, この操作を深さ 0 になるまで繰り返すことにより, 深さ 1 以上の全てのインデックスに対して, $c_{\boldsymbol{k}}=0$ であることが分かる．よって, 最後に差を考える前の式から

$$c_{\varnothing}=0$$

が分かるから, (r,m) の場合が示された．次に任意の $0\leq m$ に対して, $(r-1,m)$ が成り立っているときに $(r,0)$ が成り立つことを示す．先ほどと同様に,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I}\left(c_{\boldsymbol{k}}(n+1)-c_{\boldsymbol{k}}(n)+\sum_{0<h}\frac{c_{(\boldsymbol{k},h)}(n+1)}{n^h}\right)\zeta_{<n}(\boldsymbol{k})=0$$

を考えると, 仮定より深さ r のインデックス $\boldsymbol{k}$ に対する $c_{\boldsymbol{k}}$ は全て定数であるから,

$$c_{\boldsymbol{k}}(n+1)-c_{\boldsymbol{k}}(n)=0$$

である．よって, 上の式の係数が 0 でない最大の深さは $r-1$ であるから, 分母を払うことによりある m に対する $(r-1,m)$ の場合に帰着している．よって, 先ほどの議論と全く同様に, $(r,0)$ の場合にも全てのインデックスに対して $c_{\boldsymbol{k}}=0$ が示される． □

この多重調和和の線形独立性は, 言い換えると, 任意の N に対して, $\mathfrak{H}^1$ から複素数の無限個の直積へ写像

$$w\mapsto(\zeta_{<N}(w),\zeta_{<N+1}(w),\zeta_{<N+2}(w),\dots)$$

が単射であることを示している．これを簡潔に, n を変数としたとき

$$w\mapsto\zeta_n(w)$$

が単射であるという.

5.5 Hopf 代数構造

Proposition 5.12 (Hopf 代数構造)**.** $\mathfrak{H}^1$ は次のようにして $\mathbb{Q}$ 上の Hopf 代数構造が入る.

(i) 積を調和積 $*$ とする.

(ii) 単位射は埋め込み $\mathbb{Q}\to\mathfrak{H}^1$ で与える.

(iii) 余積は

$$\Delta^*(z_{k_1}\cdots z_{k_r}) := \sum_{i=0}^{r} z_{k_1}\cdots z_{k_i}\otimes z_{k_{i+1}}\cdots z_{k_r}$$

で定める.

(iv) x, y の多項式としての定数項を与える写像として余単位射を与える.

(v) antipode は

$$S^*(z_{k_1}\cdots z_{k_r}) := (-1)^r y x^{k_r-1}(x+y)x^{k_{r-1}-1}\cdots(x+y)x^{k_1-1}$$

として定める.

Proof. $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\Delta^*(w_1) * \Delta^*(w_2) = \Delta^*(w_1 * w_2)$$

であることと, S^2 が恒等写像であることから,

$$\sum_{i=0}^{r} z_{k_1}\cdots z_{k_i} * S(z_{k_{i+1}}\cdots z_{k_r}) = 0$$

を示せば十分である.

1 つ目の式を示す. まず,

$$\sum_{\substack{-n<n_1<\cdots<n_r<m \\ n_i\neq 0}} \frac{1}{|n_1|^{k_1}\cdots|n_r|^{k_r}}$$

を考えるとこれは多重調和和の場合と全く同様に調和関係式を満たすことが分かる. 一方, n, m を独立な変数としたとき,

$$w_1\otimes w_2 \to \zeta_{<n}(w_1)\zeta_{<m}(w_2)$$

が単射であることと,

$$\sum_{\substack{-n<n_1<\cdots<n_r<m \\ n_i\neq 0}} \frac{1}{|n_1|^{k_1}\cdots|n_r|^{k_r}} = \sum_{i=0}^{r} \zeta_{<n}(k_1,\ldots,k_i)\zeta_{<m}(k_r,\ldots,k_{i+1})$$

であることから, 示される. 2 つ目の式は, 多重調和和の antipode 関係式

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\zeta_{<n}(k_1,\ldots,k_i)\zeta^{\star}_{<n}(k_r,\ldots,k_{i+1}) = 0$$

を調和積で展開すると,

$$\sum_{i=0}^{r} \zeta_{<n}((k_1, \ldots, k_i) * S^*(k_{i+1}, \ldots, k_r)) = 0$$

と書けることから $w \mapsto \zeta_{<n}(w)$ の単射性より従う. □

5.6 Kawashima 関係式

Definition 5.13. Kawashima 関数を

$$\zeta_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{k}; t) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \zeta^*(k_1, \ldots, k_i; T) \zeta^{*,\star}(k_r, \ldots, k_{i+1}; t; T)$$

によって定義する.

Theorem 5.14 (Kawashima 関係式; Kawashima [K])**.** 以下の結果が成り立つ.

1. インデックス $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ に対して, 調和関係式

$$\zeta_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{k}; t) \zeta_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{l}; t) = \zeta_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}; t)$$

が成り立つ.

2. インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して,

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \frac{(t)_{n_r}}{n_r!} = \zeta_{\mathcal{K}}(\phi(\boldsymbol{k}); 1-t)$$

ここで, ϕ は $\phi(x) = x + y, \phi(y) = -y$ によって定まる $\mathfrak{H}^1$ 上の同型である.

Proof. (i) は $\mathfrak{H}^1$ の Hopf 代数構造より, $\zeta^*(\boldsymbol{k}; T)$ と $(-1)^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})} \zeta^{*,\star}(\boldsymbol{k}; t; T)$ が調和関係式を満たすことから分かる. (ii) は Kaneko-Xu-Yamamoto の定理より,

$$yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1} \cdots (y+x)x^{k_r-1}$$

に対して成り立っていることが分かり, それらが $\mathfrak{H}^1$ を生成することから従う. □

Kawashima 関数は t のべき級数と考えたときに定数項がない, よって調和関係式の t の係数を比較することによって,

$$\zeta_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}; 1-t)$$

の 1 次の係数が 0 であることが分かる. (ii) を用いて係数を多重ゼータ値で表すことによって以下を得る.

Corollary 5.15 (Kawashima 関係式の線形部分; [K])**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1, w_1, w_2 \notin \mathbb{Q}$ とするとき,

$$\zeta(\phi(w_1 * w_2)x) = 0$$

が成り立つ.

Kawashima 関係式の線形部分は非常に美しい形をしており, 多くの重要な関係式族を含む.

Proposition 5.16. 導分関係式は Kawashima 関係式の線形部分に含まれる.

Proof. $\mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\partial_n(wx) = -\phi(\phi(w) * z_n)x$$

であることから分かる. □

Proposition 5.17. 双対性は Kawashima 関係式の線形部分に含まれる.

Proof. antipode 関係式

$$\sum_{i=0}^{r} z_{k_1} \cdots z_{k_i} * S^*(z_{k_{i+1}} \cdots z_{k_r})$$

より, Kawashima 関係式の線形部分から,

$$\begin{aligned}&\zeta(\phi(z_{k_1} \cdots z_{k_r})x) + \zeta(\phi(S^*(z_{k_1} \cdots z_{k_r}))x) \\ &= \sum_{i=0}^{r} \zeta(\phi(z_{k_1} \cdots z_{k_i} * S^*(z_{k_{i+1}} \cdots z_{k_r}))x) = 0\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}&\zeta((-y)(x+y)^{k_1-1} \cdots (-y)(x+y)^{k_r-1}x) \\ &= (-1)^r \zeta(y(x+y)^{k_r-1}x(x+y)^{k_{r-1}-1} \cdots x(x+y)^{k_1-1}x)\end{aligned}$$

が得られる. これは,

$$\zeta((1-\tau)(\phi(yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1})x) = 0$$

と表すことができ, ϕ は $\mathfrak{H}^1$ の同型だから, 双対性が従う. □

6　巡回和公式

6.1　巡回同値類

Definition 6.1. インデックスに対して, 同値関係 $\sim$ を

$$(k_1, \ldots, k_r) \sim (k_2, \ldots, k_r, k_1)$$

によって生成されるものとする．$\boldsymbol{k} \sim \boldsymbol{l}$ のとき $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{l}$ は巡回同値であるという．$\boldsymbol{k}$ と巡回同値なインデックス全体の集合を $\boldsymbol{k}$ の巡回同値類という．また, 集合 α はあるインデックス $\boldsymbol{k}$ の巡回同値類になっているとき, 単に巡回同値類という．α に含まれるインデックスの深さは一定なので, それを巡回同値類 α の深さという．

6.2　巡回和公式

Proposition 6.2. インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して,

$$Z(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \frac{n_1}{n_r - n_1}$$

と定義する．このとき, 全ての成分が 1 であるインデックスを除いて $Z(\boldsymbol{k})$ は収束する．

Proof. $k_i > 1$ であるとする．

$$\begin{aligned} Z(k_1, \ldots, k_r) &\leq Z(\{1\}^{i-1}, 2, \{1\}^{r-i}) \\ &\leq Z(2, \{1\}^{r-1}) \\ &= \zeta(\{1\}^{r-1}, 2) + Z(\{1\}^{r-1}, 2) \end{aligned}$$

ここで, 最後の等号には部分分数分解

$$\frac{1}{n_1(n_r - n_1)} = \frac{1}{n_r}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_r - n_1}\right)$$

を用いた.

$$\begin{aligned}
Z(\{1\}^m,2) &= \sum_{0<n_1<\cdots<n_m<n_{m+1}} \frac{1}{n_2\cdots n_m n_{m+1}^2}\frac{1}{n_{m+1}-n_1} \\
&\le \sum_{\substack{0<n_2<\cdots<n_m<n_{m+1}\\ 0<n_1<n_{m+1}}} \frac{1}{n_2\cdots n_m n_{m+1}^2}\frac{1}{n_{m+1}-n_1} \\
&= \sum_{\substack{0<n_2<\cdots<n_m<n_{m+1}\\ 0<n_1<n_{m+1}}} \frac{1}{n_2\cdots n_m n_{m+1}^2}\frac{1}{n_1}
\end{aligned}$$

より和は収束することが分かる. □

以下の証明は本質的に Hoffman-Ohno [HO] による証明である.

Theorem 6.3 (巡回和公式; Hoffman-Ohno [HO]). α を 1 でない成分を持つインデックスを含む巡回同値類として, その深さを r としたとき,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_r-2}\zeta(i+1,k_1,\ldots,k_{r-1},k_r-i)=\sum_{\boldsymbol{k}\in\alpha}\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+1)$$

が成り立つ.

Proof. 部分分数分解により,

$$Z(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+1)=Z(k_1+1,k_2,\ldots,k_r)-\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+1)$$

が得られる. また,

$$\begin{aligned}
\sum_{n<a}\frac{1}{a(a-m)} &= \frac{1}{m}\sum_{n<a}\left(\frac{1}{a-m}-\frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{n-m<a\le n}\frac{1}{a} \\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{0<a<m}\frac{1}{n-a}+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

であることを $m=n_1, n=n_r$ として用いると,

$$Z(k_1,\ldots,k_r,1)=Z(1,k_1,\ldots,k_r)+\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+1)$$

が得られる. これを $Z(k_1,\dots,k_r,1)$ から初めて繰り返し用いることによって,

$$\begin{aligned}&Z(k_1,\dots,k_r,1)-Z(k_r,k_1,\dots,k_{r-1},1)\\&=\zeta(k_1,\dots,k_{r-1},k_r+1)-\sum_{i=0}^{k_r-2}\zeta(i+1,k_1,\dots,k_{r-1},k_r-i)\end{aligned}$$

これを巡回同値類 α に含まれるインデックスに対して足し合わせると, 左辺は打ち消し合って 0 になることから定理が示される. □

α を $\{2\}^n$ の巡回同値類とすると,

$$\zeta(1,\{2\}^n)=\zeta(\{2\}^{n-1},3)$$

を得る. これは双対性から従う等式である. α を $\{3\}^n$ の同値類とすると,

$$\zeta(1,\{3\}^n)+\zeta(2,\{3\}^{n-1},2)=\zeta(\{3\}^{n-1},4)$$

となる. 重さ k, 深さ r の全ての巡回同値類に関する巡回和公式を足し合わせると,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k+1,r+1)}\zeta(\boldsymbol{k})=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k+1,r)}\zeta(\boldsymbol{k})$$

が得られるが, $k\to k-1$ として, これを $r-1,r-2,\dots$ でも同様のことを行うと,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)}\zeta(\boldsymbol{k})=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r-1)}\zeta(\boldsymbol{k})=\cdots=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,1)}\zeta(\boldsymbol{k})=\zeta(k)$$

となって和公式が得られる. つまり巡回和公式は和公式を含んでいるということになる.

7 重み付き和公式と制限付き和公式

7.1 重み付き和の複シャッフル関係式

Definition 7.1. 複素数 $u_1,\dots,u_r$ に対して, 重み付き和を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}_k(u_1,\dots,u_r)&:=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)}u_1^{k_1-1}\cdots u_r^{k_r-1}\zeta(\boldsymbol{k})\\\mathfrak{Z}_k^{Ш}(u_1,\dots,u_r)&:=\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)}u_1^{k_1-1}\cdots u_r^{k_r-1}\zeta^{Ш}(\boldsymbol{k})\\\mathfrak{Z}_k^{*}(u_1,\dots,u_r)&:=\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)}u_1^{k_1-1}\cdots u_r^{k_r-1}\zeta^{*}(\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

その母関数を,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}(u_1,\dots,u_r) &:= \sum_{r\le k} \mathfrak{z}_k(u_1,\dots,u_r)t^{k-r} \\
\mathfrak{Z}^{ш}(u_1,\dots,u_r) &:= \sum_{r\le k} \mathfrak{z}^{ш}_k(u_1,\dots,u_r)t^{k-r} \\
\mathfrak{Z}^{*}(u_1,\dots,u_r) &:= \sum_{r\le k} \mathfrak{z}^{*}_k(u_1,\dots,u_r)t^{k-r}
\end{aligned}$$

によって定義する. 各複素数 u に対して対応する変数 x_u からなる複素数係数の非可換多項式環 $\mathfrak{I}$ を考えて,

$$\mathfrak{Z}(x_{u_1}\cdots x_{u_r}) = \mathfrak{Z}(u_1,\dots,u_r)$$

のように上で定義した和を $\mathfrak{I}$ で定義されているものと見なす.

定義から,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}(u_1,\dots,u_r) &= \mathfrak{Z}^{ш}(u_1,\dots,u_r) - \mathfrak{Z}^{ш}(u_1,\dots,u_{r-1},0) \\
&= \mathfrak{Z}^{*}(u_1,\dots,u_r) - \mathfrak{Z}^{*}(u_1,\dots,u_{r-1},0)
\end{aligned}$$

であることが分かる.

Definition 7.2 (シャッフル積)**.** $w_1, w_2, w \in \mathfrak{I}$ と $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}
w \,ш\, 1_{\mathfrak{I}} &= 1_{\mathfrak{I}} \,ш\, w = w \\
w_1x_{u_1} \,ш\, w_2x_{u_2} &= (w_1x_{u_1} \,ш\, w_2)x_{u_2} + (w_1 \,ш\, w_2x_{u_2})x_{u_1}
\end{aligned}$$

によって双線形に $\mathfrak{I}$ における積 ш を定義する. また, $w_1, w_2, w \in \mathfrak{I}$ と $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}
w \,ш_\delta\, 1_{\mathfrak{I}} &= 1_{\mathfrak{I}} \,ш_\delta\, w = w \\
w_1x_{u_1} \,ш_\delta\, w_2x_{u_2} &= (w_1x_{u_1} \,ш_\delta\, w_2 + w_1 \,ш_\delta\, w_2x_{u_2})x_{u_1+u_2}
\end{aligned}$$

によって双線形に $\mathfrak{I}$ における積 $ш_\delta$ を定義する. $\mathfrak{I}$ における写像 δ を

$$\delta(x_{u_1}\cdots x_{u_r}) := x_{u_1}x_{u_1+u_2}\cdots x_{u_1+\cdots+u_r}$$

によって定めると, $w_1, w_2 \in \mathfrak{I}$

$$\delta(w_1) \,ш_\delta\, \delta(w_2) = \delta(w_1 \,ш\, w_2)$$

が成り立つことが分かる.

Theorem 7.3 (シャッフル関係式)**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{I}$ に対して,

$$\mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(w_1)\mathfrak{Z}(w_2) = \mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(w_1 \sqcup\!\sqcup_\delta w_2)$$

が成り立つ.

Proof. $\mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}$ の定義における $\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(\boldsymbol{k})$ を $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)$ に置き換えたものを

$$\mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(u_1, \ldots, u_r; z)$$

と表すことにする.

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(\delta(x_{u_1} \cdots x_{u_r}); z) \\
&= \sum_{r \le k} t^{k-r} \sum_{\boldsymbol{k} \in I(k,r)} u_1^{k_1 - 1}(u_1 + u_2)^{k_2 - 1} \cdots (u_1 + \cdots + u_r)^{k_r - 1} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) \\
&= \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r} \frac{1}{(n_1 - u_1 t)(n_2 - (u_1 + u_2)t) \cdots (n_r - (u_1 + \cdots + u_r)t)} z^{n_r} \\
&= z^{(u_1 + \cdots + u_r)t} \int_{0 < s_1 < \cdots < s_r < z} \frac{t_1^{-u_1}}{1 - t_1}\, dt_1 \cdots \frac{t_r^{-u_r}}{1 - t_r}\, dt_r
\end{aligned}$$

これより, 多重ゼータ値のシャッフル関係式のときと全く同様に, $w_1, w_2 \in \mathfrak{I}$ に対して,

$$\mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(\delta(w_1); z)\mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(\delta(w_2); z) = \mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(\delta(w_1 \sqcup\!\sqcup w_2); z)$$

が得られる. $z \to 1$ における漸近展開の定数項を考えることによって,

$$\mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(w_1)\mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(w_2) = \mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(w_1 \sqcup\!\sqcup_\delta w_2)$$

を得る. □

上の証明から, $\frac{t^{u-1}dt}{1-t}$ に対応する文字を a_u と書くことにすると, 正規化した反復積分 I を用いて

$$\mathfrak{Z}^{\sqcup\!\sqcup}(\delta(x_{u_1} \cdots x_{u_r})) = I(a_{1-u_1} \cdots a_{1-u_r})$$

と書けることが分かる. ここで反復積分の正規化は, $z \to 1$ における漸近展開が

$$I_z(w) = I(w; \mathrm{Li}_1(z)) + O((1-z)\mathrm{Li}_1(z)^m)$$

となるような $I(w; T)$ の定数項 $I(w) := I(w; 0)$ として定義される.

Definition 7.4 (調和積)**.** 複素数 u_1, u_2 に対して,

$$x_{u_1} \diamond x_{u_2} := \frac{1}{(u_1 - u_2)t}(x_{u_1} - x_{u_2})$$

とする. $w_1, w_2, w \in \mathfrak{I}$ に対して,

$$\begin{aligned} w *_\delta 1_{\mathfrak{I}} = 1_{\mathfrak{I}} *_\delta w = w \\ w_1 x_{u_1} *_\delta w_2 x_{u_2} = (w_1 x_{u_1} *_\delta w_2) x_{u_2} + (w_1 *_\delta w_2 x_{u_2}) x_{u_1} + (w_1 *_\delta w_2)(x_{u_1} \diamond x_{u_2}) \end{aligned}$$

によって双線形に $\mathfrak{I}$ における積を定義する.

$u_1 = u_2$ の場合は積を定義できないが, $u_1 \neq u_2$ として関係式を得てから $u_1 \to u_2$ と近づけるという方法を用いることができる. $u_1 = u_2$ の場合の $x_{u_1} \diamond x_{u_2}$ という記号はその意味で用いることにする.

Theorem 7.5 (調和関係式)**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{I}$ に対して,

$$\mathfrak{Z}^*(w_1)\mathfrak{Z}^*(w_2) = \mathfrak{Z}^*(w_1 *_\delta w_2)$$

が成り立つ.

Proof. $\mathfrak{Z}^*$ の定義における $\zeta(\boldsymbol{k})$ を $\zeta_{<n}(\boldsymbol{k})$ に置き換えたものを,

$$\mathfrak{Z}^*_{<n}(u_1, \ldots, u_r)$$

と表すことにする.

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Z}^*_{<n}(u_1, \ldots, u_r) \\ &= \sum_{r \le k} t^{k-r} \sum_{\boldsymbol{k} \in I(k,r)} u_1^{k_1 - 1} u_2^{k_2 - 1} \cdots u_r^{k_r - 1} \zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) \\ &= \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r < n} \frac{1}{(n_1 - u_1 t)(n_2 - u_2 t) \cdots (n_r - u_r t)} \end{aligned}$$

だから,

$$\frac{1}{(n - u_1 t)(n - u_2 t)} = \frac{1}{(u_1 - u_2)t}\left(\frac{1}{n - u_1 t} - \frac{1}{n - u_2 t}\right)$$

であることを考えれば多重ゼータ値の調和関係式の場合と全く同様に, $w_1, w_2 \in \mathfrak{I}$ に対して,

$$\mathfrak{Z}^*_{<n}(w_1)\mathfrak{Z}^*_{<n}(w_2) = \mathfrak{Z}^*_{<n}(w_1 *_\delta w_2)$$

が成り立つことが分かる．$n \to \infty$ として漸近展開の定数項を考えることによって定理が示される． $\square$

Proposition 7.6. 以下の関係式が成り立つ．

$$\mathfrak{z}^{ш}(u_1, \ldots, u_r) = \sum_{h=0}^{r-1} (-1)^h \sum_{\substack{0 \le e_0, \ldots, e_{r-h} \\ |\boldsymbol{e}|=h}} \mathfrak{z}(\{0\}^{e_0}, \{u_1\}^{e_1+1}, \ldots, \{u_{r-h}\}^{e_{r-h}+1})$$

$$\mathfrak{z}^{*}_{k}(u_1, \ldots, u_r) = \sum_{h=0}^{r} \zeta^{*}(\{1\}^h) \mathfrak{z}^{ш}_{k-h}(u_1, \ldots, u_{r-h})$$

Proof. 1 つ目の式は,

$$I(a_{u_1} \cdots a_{u_r}) = \sum_{h=0}^{r-1} I(a_{u_1} \cdots a_{u_{r-h-1}}(a_{u_{r-h}} - y) y^h)$$

と

$$I(a_{u_1} \cdots a_{u_{r-h-1}}(a_{u_{r-h}} - y) y^h) = (-1)^h I((a_{u_1} \cdots a_{u_{r-h-1}} ш\, y^h)(a_{u_{r-h}} - y))$$

を用いることによって示される．2 つ目の等式は許容インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して正規化定理から得られる等式である

$$\zeta^{*}(\boldsymbol{k}, \{1\}^n) = \sum_{k=0}^{n} \zeta^{ш}(\boldsymbol{k}, \{1\}^k) \zeta^{*}(\{1\}^{n-k})$$

を用いることによって示される． $\square$

深さ 2 の場合の例を挙げると,

$$\mathfrak{z}^{ш}(u, v) = \mathfrak{z}(u, v) - \mathfrak{z}(0, u) - \mathfrak{z}(u, u)$$

となる．

7.2 深さ 2 の制限付き和公式と重み付き和公式

深さ 1 の場合の重み付き和は

$$\mathfrak{z}(u) = \mathfrak{z}^{ш}(u) = \mathfrak{z}^{*}(u)$$

となって一致することが分かる．次に深さ 2 の重み付き和の間にどのような関係式が成り立っているのかを見ていきたい．

Proposition 7.7. 複素数 u, v に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\mathfrak{z}(u, u+v) + \mathfrak{z}(v, u+v) = \mathfrak{z}(u, v) + \mathfrak{z}(v, u) + \mathfrak{z}(u \diamond v) - \zeta(2)$$

Proof. 複シャッフル関係式により,

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}^{ш}(u)\mathfrak{z}^{ш}(v) &= \mathfrak{z}^{ш}(u, u+v) + \mathfrak{z}^{ш}(v, u+v) \\ &= \mathfrak{z}(u, u+v) + \mathfrak{z}(v, u+v) - \mathfrak{z}(0, u) - \mathfrak{z}(0, v) - \mathfrak{z}(u, u) - \mathfrak{z}(v, v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}^{*}(u)\mathfrak{z}^{*}(v) &= \mathfrak{z}^{*}(u, v) + \mathfrak{z}^{*}(v, u) + \mathfrak{z}^{*}(u \diamond v) \\ &= \mathfrak{z}^{ш}(u, v) + \mathfrak{z}^{ш}(v, u) + \mathfrak{z}(u \diamond v) - \zeta(2) \\ &= \mathfrak{z}(u, v) + \mathfrak{z}(v, u) + \mathfrak{z}(u \diamond v) - \mathfrak{z}(0, u) - \mathfrak{z}(0, v) - \mathfrak{z}(u, u) - \mathfrak{z}(v, v)\end{aligned}$$

よってこの 2 つの差を考えることによって示される. □

$u = 1, v = -1$ を代入すると,

$$\mathfrak{z}(1, -1) + \mathfrak{z}(-1, 1) + \mathfrak{z}(1 \diamond (-1)) - \zeta(2) = 0$$

を得る. この t^{k-2} の係数を比較して,

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I(k,2)} ((-1)^{k_1-1} + (-1)^{k_2-1})\zeta(k_1, k_2) = -\frac{1-(-1)^{k-1}}{2}\zeta(k)$$

が得られ, $k = 2n$ として,

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I(2n,2)} (-1)^{k_1}\zeta(k_1, k_2) = \frac{1}{2}\zeta(2n)$$

これと深さ 2 の和公式を合わせて以下が得られる.

Corollary 7.8 (Gangl-Kaneko-Zagier の制限付き和公式 [GKZ])**.** 正整数 $1 < n$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k, 2n-2k) = \frac{3}{4}\zeta(2n)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k-1, 2n-2k+1) = \frac{1}{4}\zeta(2n)$$

が成り立つ.

$u=v=1$ を代入すると,

$$2\mathfrak{z}(1,2)=2\mathfrak{z}(1,1)+\mathfrak{z}(1\diamond 1)-\zeta(2)$$

となる. ここで, 調和積から考えると

$$\mathfrak{z}(1\diamond 1)=\sum_{0<n}\frac{1}{(n-t)^2}$$

となることが分かる. よって t^{k-2} の係数を比較して以下を得る.

Corollary 7.9 (Ohno-Zudilin の重み付き和公式 [OZ, Theorem 3])**.** $3\leq k$ に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,2)}2^{k_2}\zeta(k_1,k_2)=(k+1)\zeta(k)$$

7.3 Machide の重み付き和公式とその一般化

この項では, Machide [M1, M2] によって示された重み付き和公式 $(4<k)$

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,3)}2^{k_2}(3^{k_3-1}-1)\zeta(k_1,k_2,k_3)=\frac{(k-1)(k+4)}{6}\zeta(k)$$

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,4)}2^{k_2+k_4-1}(3^{k_3}2^{k_4-1}-3^{k_3}-1)\zeta(k_1,k_2,k_3,k_4)=\frac{(k+1)(k^2+5k-18)}{24}\zeta(k)$$

の一般化を示す.

Definition 7.10 (階段数列)**.** $0<s_1,\ldots,s_{r-1},0\leq s_r,s_1=1,|s_{i+1}-s_i|=1$ であるような長さ r の数列 $(s_1,\ldots,s_r)$ を階段数列という. 長さ r の階段数列全体を S_r で表す.

具体例を挙げると, 長さ 3 の階段数列は

$$(1,2,3),(1,2,1)$$

の 2 つであり, 長さ 4 の階段数列は

$$(1,2,3,4),(1,2,3,2),(1,2,1,2),(1,2,1,0)$$

の 4 つである.

Definition 7.11. $B_{2k} := (x_1x_0)^k, B_{2k+1} := (x_1x_0)^k x_1$ として, $0 < n \le r, 0 \le j \le r$ に対して,

$$S_{r,n,j} := \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in I(r,n) \\ k_i = 1 \bmod 2,\, 0<i\le j \\ k_i = 0 \bmod 2,\, j<i\le r}} B_{k_1} \sqcup\!\sqcup_\delta \cdots \sqcup\!\sqcup_\delta B_{k_n}$$

と定義する.

Proposition 7.12. $0 < n \le r$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(r,n)} B_{k_1} \sqcup\!\sqcup_\delta \cdots \sqcup\!\sqcup_\delta B_{k_r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S_{r,n,j}$$

Proof.

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(r,n)} B_{k_1} \sqcup\!\sqcup_\delta \cdots \sqcup\!\sqcup_\delta B_{k_r}$$

において現れるインデックスの成分のうち, j 個が奇数であるもの全体の和が

$$\binom{n}{j} S_{r,n,j}$$

となることから従う. □

Proposition 7.13. $0 < n \le r, 0 \le j \le r$ に対して, 以下の漸化式が成り立つ.

$$S_{r,n,j} = (j(S_{r-1,n,j-1} + S_{r-1,n-1,j-1}) + (n-j)S_{r-1,n,j+1})x_j$$

Proof. $ш_\delta$ の計算により,

$$
\begin{aligned}
S_{r,n,j} &= \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in I(r,n)\\ k_i=1 \bmod 2,\, 0<i\le j\\ k_i=0 \bmod 2,\, j<i\le r}} B_{k_1} ш_\delta \cdots ш_\delta B_{k_n} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in I(r,n)\\ k_i=1 \bmod 2,\, 0<i\le j\\ k_i=0 \bmod 2,\, j<i\le r}} B_{k_1} ш_\delta \cdots ш_\delta B_{k_l-1} ш_\delta \cdots ш_\delta B_{k_n} \right) x_j \\
&= \left(\sum_{l=1}^{j} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in I(r,n)\\ k_i=1 \bmod 2,\, 0<i\le j\\ k_i=0 \bmod 2,\, j<i\le r\\ k_l=1}} B_{k_1} ш_\delta \cdots ш_\delta B_{k_l-1} ш_\delta \cdots ш_\delta B_{k_n} \right) x_j \\
&\quad + \left(\sum_{l=1}^{j} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in I(r,n)\\ k_i=1 \bmod 2,\, 0<i\le j\\ k_i=0 \bmod 2,\, j<i\le r\\ k_l\neq 1}} B_{k_1} ш_\delta \cdots ш_\delta B_{k_l-1} ш_\delta \cdots ш_\delta B_{k_n} \right) x_j \\
&\quad + \left(\sum_{l=j+1}^{r} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in I(r,n)\\ k_i=1 \bmod 2,\, 0<i\le j\\ k_i=0 \bmod 2,\, j<i\le r}} B_{k_1} ш_\delta \cdots ш_\delta B_{k_l-1} ш_\delta \cdots ш_\delta B_{k_n} \right) x_j \\
&= (jS_{r-1,n-1,j-1} + jS_{r-1,n,j-1} + (n-j)S_{r-1,n,j+1})u_j
\end{aligned}
$$

と示される. □

Theorem 7.14. $0 \le j \le r$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$
\sum_{n=1}^{r} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{j} S_{r,n,j} = (-1)^{r-1} \sum_{\boldsymbol{n}\in S_r,\, n_r=j} (-1)^{\frac{r-n_r}{2}} n_1 \cdots n_{r-1} x_{n_1} \cdots x_{n_r}
$$

Proof. r に関する帰納法で示す. $r=1$ のときは明らか. $r-1$ まで成立するとする. 一つ

前の命題より,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{r}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n}{j}S_{r,n,j}\\
&=\sum_{n=1}^{r}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n}{j}(j(S_{r-1,n,j-1}+S_{r-1,n-1,j-1})+(n-j)S_{r-1,n,j+1})x_j\\
&=\sum_{n=1}^{r}(-1)^{n-1}\binom{n-1}{j-1}(S_{r-1,n,j-1}+S_{r-1,n-1,j-1})x_j\\
&\qquad+\sum_{n=1}^{r}(-1)^{n-1}\binom{n-1}{j}S_{r-1,n,j+1}x_j\\
&=\sum_{n=1}^{r}(-1)^{n-1}\left(\binom{n-1}{j-1}-\binom{n}{j-1}\right)S_{r-1,n,j-1}x_j\\
&\qquad+(j+1)\sum_{n=1}^{r}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n}{j+1}S_{r-1,n,j+1}x_j\\
&=-\sum_{n=1}^{r}(-1)^{n-1}\binom{n-1}{j-2}S_{r-1,n,j-1}x_j\\
&\qquad+(j+1)\sum_{n=1}^{r}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n}{j+1}S_{r-1,n,j+1}x_j\\
&=(-1)^{r-1}\left(\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in S_r\\ n_{r-1}=j-1\\ n_r=j}}+\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in S_r\\ n_{r-1}=j+1\\ n_r=j}}\right)(-1)^{\frac{r-n_r}{2}}n_1\cdots n_{r-1}x_{n_1}\cdots x_{n_r}\\
&=(-1)^{r-1}\sum_{\boldsymbol{n}\in S_r,n_r=j}(-1)^{\frac{r-n_r}{2}}n_1\cdots n_{r-1}x_{n_1}\cdots x_{n_r}
\end{aligned}
$$

□

$j=0$ から $j=r$ まで足し合わせることにより, 以下の等式を得る.

Corollary 7.15. 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{n=1}^{r}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{\boldsymbol{k}\in I(r,n)}B_{k_1}ш_\delta\cdots ш_\delta B_{k_n}=(-1)^{r-1}\sum_{\boldsymbol{n}\in S_r}(-1)^{\frac{r-n_r}{2}}n_1\cdots n_{r-1}x_{n_1}\cdots x_{n_r}$$

Proposition 7.16. $\mathbb{C}[[t,v]]$ において, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{0<r}(-1)^{r-1}\mathfrak{z}^{ш}(B_r)v^r = 1-\prod_{0<n}\frac{n^2-(t+2v)n+tv}{(n-t)(n-2v)}$$

Proof. まず,

$$(x_0+x_1)^{r-1}(x_1-x_0)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i-1}B_{r-i}\,ш_\delta\,x_0^i$$

であることが,

$$B_{2m}\,ш_\delta\,x_0^h=\sum_{\substack{0\le e_0,\dots,e_{2m}\\ |\boldsymbol{e}|=h}}x_0^{e_0}x_1^{e_1+1}x_0^{e_2+1}\cdots x_1^{e_{2m-1}+1}x_0^{e_{2m}+1}$$

$$B_{2m+1}\,ш_\delta\,x_0^h=\sum_{\substack{0\le e_0,\dots,e_{2m+1}\\ |\boldsymbol{e}|=h}}x_0^{e_0}x_1^{e_1+1}x_0^{e_2+1}\cdots x_1^{e_{2m-1}+1}x_0^{e_{2m}+1}x_1^{e_{2m+1}+1}$$

であることから分かる. よって,

$$(-1)^{r-1}\mathfrak{z}^{ш}(B_r)=\mathfrak{z}^{ш}((x_0+x_1)^{r-1}(x_1-x_0))$$

であり,

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}^{ш}_k((x_0+x_1)^{r-1}(x_1-x_0))&=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)}\zeta(\boldsymbol{k})\prod_{i=1}^{r}(1+\delta_{k_i,1})\\&=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)}2^{r-\mathrm{ht}(\boldsymbol{k})}\zeta(\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

だから, Ohno-Zagier の関係式より,

$$\begin{aligned}\sum_{0<r}(-1)^{r-1}\mathfrak{z}^{ш}(B_r)v^r&=\sum_{0<k,r}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)}2^{r-\mathrm{ht}(\boldsymbol{k})}\zeta(\boldsymbol{k})\right)t^{k-r}v^r\\&=1-\prod_{0<n}\frac{n^2-(t+2v)n+tv}{(n-t)(n-2v)}\end{aligned}$$

が示される. □

Theorem 7.17. $0<r<k$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in S_r}(-1)^{\frac{r-n_r}{2}}n_1\cdots n_{r-1}\mathfrak{z}_k(n_1,\dots,n_r)=\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1}\binom{k-i-1}{r-i-1}\binom{r}{i}\zeta(k)$$

Proof.

$$\mathfrak{z}(u_1,\ldots,u_r)=\mathfrak{z}^{ш}(u_1,\ldots,u_r)-\mathfrak{z}^{ш}(u_1,\ldots,u_{r-1},0)$$

であることから,

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<r}v^r\sum_{\boldsymbol{n}\in S_r}(-1)^{\frac{r-n_r}{2}}n_1\cdots n_{r-1}\mathfrak{z}(n_1,\ldots,n_r)\\
&=\sum_{0<r}v^r\sum_{\boldsymbol{n}\in S_r}(-1)^{\frac{r-n_r}{2}}n_1\cdots n_{r-1}\mathfrak{z}^{ш}(n_1,\ldots,n_r)\\
&=\sum_{0<r}v^r\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{n}\sum_{\boldsymbol{k}\in I(r,n)}(-1)^{k_1-1}\mathfrak{z}^{ш}(B_{k_1})\cdots(-1)^{k_r-1}\mathfrak{z}^{ш}(B_{k_n})\\
&=\sum_{0<n}\frac{1}{n}\left(1-\prod_{0<k}\frac{k^2-(t+2v)k+tv}{(k-t)(k-2v)}\right)^n\\
&=-\ln\prod_{0<n}\frac{n^2-(t+2v)n+tv}{(n-t)(n-2v)}\\
&=-\sum_{0<n}\left(\ln\left(1-\frac{v}{n}\left(1+\frac{1}{1-\frac{t}{n}}\right)\right)-\ln\left(1-\frac{2v}{n}\right)\right)\\
&=\sum_{0<r}\frac{v^r}{r}\sum_{0<n}\frac{1}{n^r}\left(\left(1+\frac{1}{1-\frac{t}{n}}\right)^r-2^r\right)\\
&=\sum_{0<r}\frac{v^r}{r}\sum_{0<n}\frac{1}{n^r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(\left(1-\frac{t}{n}\right)^{i-r}-1\right)\\
&=\sum_{0<r<k}\frac{v^r}{r}t^{k-r}\sum_{0<n}\frac{1}{n^k}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\binom{k-i-1}{r-i-1}
\end{aligned}$$

より, v^rt^{k-r} の係数を比較して定理を得る. □

$r=3,4$ とすると, 以下を得る.

Corollary 7.18 (Machide の重み付き和公式 [M1, M2])**.** $4<k$ において, 以下が成り立つ.

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,3)}2^{k_2}(3^{k_3-1}-1)\zeta(k_1,k_2,k_3)=\frac{(k-1)(k+4)}{6}\zeta(k)$$

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,4)}2^{k_2+k_4-1}(3^{k_3}2^{k_4-1}-3^{k_3}-1)\zeta(k_1,k_2,k_3,k_4)=\frac{(k+1)(k^2+5k-18)}{24}\zeta(k)$$

階段数列の中で $n_r = j$ なもの全体に制限しても, $S_{r,n,j}$ を用いた表示によって $\mathfrak{z}^{ш}$ の和が Riemann ゼータ値で書けることが分かるが, 具体的にいい感じの明示式が得られるかどうかはまだ分かっていない.

7.4 特別な形の制限付き和公式

この項では,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} \zeta(2k_1-1,1,2k_2-1,1,\ldots,1,2k_{r-1}-1,1,2k_r)$$

が π^{2k} の有理数倍になっていることを示す.

Proposition 7.19 (Borwein-Bradley-Broadhurst-Lisonek [BBBL, Proposition 1]). $(yx)^n ш (yx)^m$ に現れる単項式で x^2 をちょうど j 個含むものの係数を 1 にして全て足し合わせたものを $T_{n+m,k}$ とするとき, 非負整数 n, m に対して,

$$(yx)^n ш (yx)^m = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} 4^k \binom{n+m-2k}{n-k} T_{n+m,k}$$

が成り立つ.

Proof. $T_{n+m,k}$ の中の 1 つの単項式 w を固定する. w に x^2 が k 個含まれているとき, 両隣が x ではないような単独の x は $n+m-2k$ 個であり, このうち $n-k$ 個の x が $(yx)^n$ の方から来ており, $m-k$ 個の x が $(yx)^m$ の方から来ているものである. よって w の単独の x がどちらから来ているかを考えることによって, $\binom{n+m-2k}{n-k}$ 通りの場合がある. そして, x^2 の部分はどちらから来た x が先になっているかによって 2 通りあり, y^2 の部分も全く同様に 2 通りの場合がある. よって x, y 合わせてこれらの部分は $2k$ 個あるから, $2^{2k} = 4^k$ 通りの場合がある. これらによって単独の y がどちらから来たかは一意に定まるので, $(yx)^n ш (yx)^m$ の中の w の係数は $4^k\binom{n+m-2k}{n-k}$ で与えられる. □

$(yx)^n ш (yx)^m$ に現れる単項式は BBBL 型インデックスと対応している.

Corollary 7.20. xy, yx によって生成される次数 $2n$ のモニックな単項式の集合を L_n とする.

$$\sum_{k=0}^{n} x(yx)^k ш (yx)^{n-k} = 2^n \sum_{w\in L_n x} w$$

Proof. まず,

$$\sum_{k=0}^{n}(yx)^k ш (yx)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\min(k,n-k)} 4^j \binom{n-2j}{k-j} T_{n,k}$$
$$= 2^n \sum_{j=0}^{n} T_{n,j} = 2^n \sum_{w\in yL_{n-1}x} w$$

が成り立つ. n を $n+1$ に置き換えて,

$$\sum_{k=0}^{n+1}(yx)^k ш (yx)^{n-k+1} = 2y\sum_{k=0}^{n} x(yx)^k ш (yx)^{n-k}$$

より示される. □

$x \mapsto x_{-1}, y \mapsto x_1$ と置き換えてから, δ を用いて ш を $ш_\delta$ に変換することによって, 以下を得る.

Corollary 7.21. 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{k=0}^{r} x_1(x_0x_1)^i ш_\delta (x_{-1}x_0)^{r-i} = 2^r((x_1+x_{-1})x_0)^r x_1$$

これを x_1 と x_{-1} を入れ替えて差を考えることによって

$$\sum_{k=0}^{r} x_1(x_0x_1)^i ш_\delta (x_{-1}x_0)^{r-i} - \sum_{i=0}^{r} x_{-1}(x_0x_{-1})^i ш_\delta (x_1x_0)^i$$
$$= 2^r((x_1+x_{-1})x_0)^r(x_1-x_{-1})$$

を得る. $\mathfrak{Z}^{ш}(-u_1,\ldots,-u_r)$ は $\mathfrak{Z}^{ш}(u_1,\ldots,u_r)$ の t を $-t$ に置き換えたものとして計算できる. $\overline{B}_k$ を B_k の x_1 を x_{-1} に置き換えたものとする.

Theorem 7.22. $\mathbb{C}[[u,v]]$ における等式

$$\sum_{0<r\le k} u^{2k-2r+1}v^{2r-1} \sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} \zeta(2k_1-1,1,2k_2-1,1,\ldots,1,2k_{r-1}-1,1,2k_r)$$
$$= \frac{\cos\pi u\cos\pi v - \cos\pi\sqrt{u^2+v^2}}{\sin\pi u\sin\pi v}$$

が成り立つ.

Proof. まず,

$$\sum_{0\le r} \mathfrak{z}^{ш}(B_r)\left(\frac{v}{2}\right)^r = \prod_{0<n} \frac{\left(n-\frac{t-v-\sqrt{t^2+v^2}}{2}\right)\left(n-\frac{t-v+\sqrt{t^2+v^2}}{2}\right)}{(n-t)(n+v)}$$

と表せるから,

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le r}\left(\frac{v}{2}\right)^r \sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\mathfrak{z}^{ш}(B_i)\mathfrak{z}^{ш}(\overline{B}_{r-i}) \\
&= \prod_{0<n} \frac{\left(n^2-\left(\frac{t-v-\sqrt{t^2+v^2}}{2}\right)^2\right)\left(n^2-\left(\frac{t-v+\sqrt{t^2+v^2}}{2}\right)^2\right)}{(n^2-t^2)(n^2-v^2)} \\
&= -2\frac{\sin\pi\left(\frac{t-v-\sqrt{t^2+v^2}}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{t-v+\sqrt{t^2+v^2}}{2}\right)}{\sin\pi t\sin\pi v}
\end{aligned}$$

両辺の v に関して奇数次の項だけを取り出すことにより,

$$\sum_{0<v} v^{2r-1}\mathfrak{z}(((x_1+x_{-1})x_0)^r(x_1-x_{-1})) = \frac{\cos\pi t\cos\pi v-\cos\pi\sqrt{t^2+v^2}}{\sin\pi t\sin\pi v}$$

$t\mapsto u$ として左辺を u に関して展開することによって定理を得る. □

参考文献

[A] K. Aomoto, Special values of hyperlogarithms and linear difference schemes, *Illinois J. of Math.*, 34-2, 191–216 (1990).

[BBBL] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst and P. Lisonek, Combinatorial aspects of multiple zeta values, Electronic J. Combinatorics 5 (1998), R38

[D] V. G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), *Leningrad Math. J.* 2, 829–860 (1991).

[G] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, in Analytic Number Theory, Y. Motohashi (ed.), London Math. Soc. Lecture Note Series 247, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 95–101

[GKZ] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, Double Zeta values and modular forms. *Automorphic forms and zeta functions, World, Sci, Publ.* 71-106. (2006)

[H1] M. E. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra 194 (1997), 477-495.

[H2] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, Kyushu J. Math. 69 (2015), 345—366.

[HMOS] M. Hirose, H. Murahara, T. Onozuka and N. Sato, Linear relations of Ohno sums of multiple zeta values, Indag. Math. (N. S.) 31 (2020), 556–567.

[HO] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, 262 (2003)

[HSS] M. Hirose, N. Sato and S. Seki, The connector for Double Ohno relation, to appear in Acta Arithmetica

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compos. Math. 142 (2006), 307–338.

[K] G. Kawashima, A class of relations among multiple zeta values, *J. Number Theory 129, 755–788.* (2009)

[KS] M. Kaneko and M. Sakata, On multiple zeta values of extremal height, Bull. Aust. Math. Soc. 93 (2016), 186–193.

[KXY] M. Kaneko, C. Xu and S. Yamamoto, A generalized regularization theorem and Kawashima's relation for multiple zeta values, preprint, arXiv:2011.14338.

[LM1] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of the multiple zeta functions, Topology Appl. 62 (1995), 193–206.

[LM2] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial, Nagoya Math. J. 142 (1996), 39-65.

[M1] T. Machide, Extended double shuffle relations and the generating function of triple zeta values of any fixed weight, Kyushu J. Math 67(2013), 281-307

[M2] T. Machide, A Generating Function to Generalize the Sum Formula for Quadruple Zeta Values, Tokyo J. Math. 42(2): 329-335

[MS] H. Murahara and M. Sakata, On multiple zeta values and finite multiple zeta values of maximal height, Int. J. Number Theory 14 (2018), 975–987

[O] Y. Ohno A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, Vol. 74 (1999)

[OZ] Y. Ohno and W. Zudilin, Zeta stars, Commun. Number Theory Phys. 2 (2008), 325–347.

[Z] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in First European Congress of Mathematics (Paris, 1992), Vol. II, A. Joseph et. al. (eds.), Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 497–512.