補間多重ゼータ値

nkswtr

目次

1 補間多重ゼータ値の導入

1.1 補間多重ゼータ値

Definition 1.1 (Hoffman 代数)**.** 有理数係数の x, y からなる非可換多項式環を Hoffman 代数という．これを $\mathfrak{H}$ と表す．$\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}x$ と定義する．

$$\zeta(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}) := \zeta(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

で多重ゼータ値を表すものとする．

Definition 1.2 (補間多重ゼータ値)**.** 複素数 t と許容インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して，

$$\zeta^t(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}) := \zeta(yx^{k_1-1}(y+tx)x^{k_2-1}\cdots(y+tx)x^{k_r-1})$$

と定義する．$\mathfrak{H}^1$ の写像を

$$S^t(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}) := yx^{k_1-1}(y+tx)x^{k_2-1}\cdots(y+tx)x^{k_r-1}$$

で定め，$S := S^1$ とする．また，$\zeta^\sharp$ を

$$\zeta^\sharp(w) := 2^{\mathrm{dep}(w)}\zeta^{\frac{1}{2}}(w)$$

によって定める．

具体例を挙げると，

$$\begin{aligned}
\zeta^t(1,2,3) &= \zeta(1,2,3) + t\zeta(3,3) + t\zeta(1,5) + t^2\zeta(6) \\
\zeta^\sharp(1,2,3) &= 8\zeta(1,2,3) + 4\zeta(3,3) + 4\zeta(1,5) + 2\zeta(6)
\end{aligned}$$

のようになる. 定義から

$$\zeta^t(w)=\zeta(S^t(w))$$

であることが分かる. 縮約インデックスの記法を用いると,

$$\zeta^t(\boldsymbol{k})=\sum_{\boldsymbol{l}\preceq\boldsymbol{k}}\zeta(\boldsymbol{l})t^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})-\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}$$

と書くことができる. 写像 S^t は

$$S^{t_1}\circ S^{t_2}=S^{t_1+t_2}$$

を満たすことが分かる. $\mathfrak{H}^1[t]$ 上の同型写像 S_1^t を $S_1^t(x)=x, S_1^t(y)=y+tx$ で定めると, $yw\in\mathfrak{H}^1[t]$ に対して,

$$S^t(yw)=yS_1^t(w)$$

と表すことができる.

2 t 和公式と t 巡回和公式

2.1 t 和公式

Proposition 2.1. 自然数 $0<k$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$S^t(y^{k-1}x)=y(y+tx)^{k-2}x=\sum_{r=1}^{k-1}t^{k-r-1}\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)}yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}$$

Proof. $y(y+tx)^{k-2}x$ の t^{k-r-1} の係数は, $y(y+x)^{k-2}x$ の $y+x$ から y を $r-1$ 個選んだもの全体の和となることから分かる. □

Proposition 2.2.

$$\zeta^t(y^{k-1}x)=\zeta(k)\sum_{r=1}^{k-1}t^{k-r-1}$$

Proof. 上の命題と和公式を用いて,

$$\zeta^t(y^{k-1}x)=\sum_{r=1}^{k-1}t^{k-r-1}\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)}\zeta(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1})=\zeta(k)\sum_{r=1}^{k-1}t^{k-r-1}$$

を得る. □

Theorem 2.3 (t 和公式; Yamamoto [Y, Theorem 1.1])**.** $I_0(k,r)$ で重さ k, 深さ r の許容インデックス全体の集合を表すとする. このとき, $r<k$ に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)} \zeta^t(\boldsymbol{k}) := \sum_{j=0}^{r-1} \binom{k-1}{j} t^j (1-t)^{r-1-j} \zeta(k)$$

が成り立つ.

Proof. 前二つの命題から,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{k-1} s^{k-r-1} \sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)} \zeta^t(\boldsymbol{k}) &= \zeta^{t+s}(y^{k-1}x) \\
&= \zeta(k) \sum_{i=1}^{k-1} (s+t)^{k-i-1} \\
&= \zeta(k) \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{r=i}^{k-1} \binom{k-i-1}{k-r-1} s^{k-r-1} t^{r-i}
\end{aligned}$$

より,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)} \zeta^t(\boldsymbol{k}) = \zeta(k) \sum_{i=1}^{r} \binom{k-i-1}{k-r-1} t^{r-i}$$

これと, Vandermonde の恒等式より,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{r-1} \binom{k-1}{j} t^j (1-t)^{r-1-j} &= \sum_{i=0}^{r-1} (-t)^i \sum_{j=0}^{r-1} \binom{k-1}{j} \binom{r-1-j}{i-j} (-1)^j \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} (-t)^i \binom{r-1}{i} \sum_{j=0}^{i} \frac{(1-k,-i)_j}{j!(1-r)_j} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} (-t)^i \binom{r-1}{i} \frac{(k-r)_i}{(1-r)_i} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} t^i \binom{k-r+i-1}{k-r-1} \\
&= \sum_{i=1}^{r} t^{r-i} \binom{k-i-1}{k-r-1}
\end{aligned}$$

となることから示される. □

$t = 1, \frac{1}{2}$ とすることによって以下を得る.

Corollary 2.4. $0 < r < k$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I_0(k,r)} \zeta^{\star}(\boldsymbol{k}) = \binom{k-1}{r-1}\zeta(k)$$

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I_0(k,r)} \zeta^{\sharp}(\boldsymbol{k}) = 2\sum_{j=0}^{r-1}\binom{k-1}{j}\zeta(k)$$

2.2 t 巡回和公式

多重ゼータ値の巡回和公式は以下のようなものである.

Theorem 2.5 (巡回和公式; Hoffman-Ohno [HO])**.** α を 1 でない成分を持つインデックスを含む巡回同値類として, その深さを r としたとき,

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in \alpha} \sum_{i=0}^{k_r - 2} \zeta(i+1, k_1, \ldots, k_{r-1}, k_r - i) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \alpha} \zeta(k_1, \ldots, k_{r-1}, k_r + 1)$$

が成り立つ.

補間多重ゼータ値における巡回和公式を示すために, これを Hoffman 代数を用いて代数的に書き直すことにする.

Definition 2.6. $w \in \mathfrak{H}, u \in \{x, y\}$ に対して, 線形写像 c を

$$c(wu) = uw$$

で定める. 線形写像 C を単項式 $w \in \mathfrak{H}$ に対して,

$$C(w) := \sum_{k=0}^{\mathrm{wt}(w)-1} c^k(w)$$

で定める. ここで c^k は c の k 回合成写像を表すものとする. 線形写像 α_0, α_1 を $w \in \mathfrak{H}, u \in \{x, y\}$ に対して,

$$\alpha_0(wu) = \begin{cases} w, & u = x \\ 0, & u = y \end{cases}$$

$$\alpha_1(wu) = \begin{cases} w, & u = y \\ 0, & u = x \end{cases}$$

とする.

Proposition 2.7. 巡回和公式は, $w \in \mathfrak{H}$ に対して,

$$\zeta(y\alpha_0(C(w))x) = \zeta(y\alpha_1(C(w))x)$$

と同値である. ただし, w の全ての項は, x, y を少なくとも 1 つずつ含むとする.

Proof. 直接計算により, $w = yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}$ としたとき,

$$\begin{aligned}
\zeta(y\alpha_0(C(w))x) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta(j+1, k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - j) \\
\zeta(y\alpha_1(C(w))x) &= \sum_{i=1}^{r}\zeta(k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1)
\end{aligned}$$

となることから分かる. □

Theorem 2.8 (t 巡回和公式; Yamamoto [Y, Theorem 5.4])**.** $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_r)$ を少なくとも 1 の成分が 2 以上のインデックスとするとき, $k = \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})$ として,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta^t(j+1, k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_i) \\
&= (1-t)\sum_{i=1}^{r}\zeta(k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1) + t^r k\zeta(k+1)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. 直接計算により, $w = (y+tx)x^{k_1-1}\cdots(y+tx)x^{k_r-1}$ としたとき,

$$\begin{aligned}
\zeta(y\alpha_0(C(w))x) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta^t(j+1, k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - j) \\
&\qquad + t\sum_{i=1}^{r}\zeta(k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1) \\
\zeta(y\alpha_1(C(w))x) &= \sum_{i=1}^{r}\zeta(k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1)
\end{aligned}$$

となることが分かる. 巡回和公式より,

$$\zeta(y\alpha_0(C(w - t^r x^k))x) = \zeta(y\alpha_1(C(w - t^r x^k))x)$$

だから,

$$\zeta(y\alpha_0(C(t^r x^k))) = t^r k\zeta(k+1), \quad \zeta(y\alpha_1(C(t^r x^k))) = 0$$

より定理が示される. □

$t = 1, \frac{1}{2}$ とすることによって以下の系を得る.

Corollary 2.9. $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ を少なくとも 1 の成分が 2 以上のインデックスとするとき, $k = \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})$ として,

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2} \zeta^\star(j+1, k_{i+1}, \ldots, k_r, k_1, \ldots, k_i) = k\zeta(k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2} \zeta^\sharp(j+1, k_{i+1}, \ldots, k_r, k_1, \ldots, k_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \zeta^\sharp(k_{i+1}, \ldots, k_r, k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i+1) + 2k\zeta(k+1)$$

が成り立つ.

特に多重ゼータスター値の巡回和公式は非常にシンプルな形をしている. 例えば, $\boldsymbol{k} = (\{\{1\}^n, 2\}^m)$ とすると,

$$\zeta^\star(1, \{\{1\}^n, 2\}^m) = (n+2)\zeta((n+2)m+1)$$

が成り立つことが分かる. 特に $n = 0$ のとき,

$$\zeta^\star(1, \{2\}^m) = 2\zeta(2m+1)$$

が導かれる. これは後に述べる Ohno-Zudilin の 2-1 公式の特別な場合である. $\zeta^\sharp$ の方は通常の多重ゼータ値とほとんど同じ形で巡回和公式を満たしているところが興味深いかもしれない.

3 t 複シャッフル関係式

3.1 t シャッフル積

Definition 3.1 (t シャッフル積; Li-Qin [LQ1])**.** t シャッフル積 $\overset{t}{\sqcup\!\sqcup}$ を $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1[t]$ に対して,

$$w_1 \overset{t}{\sqcup\!\sqcup} w_2 = S^{-t}(S^t(w_1) \sqcup\!\sqcup S^t(w_2))$$

によって定める.

Definition 3.2 (t 正規化多項式)**.** t 正規化多項式を,

$$\zeta^{ш,t}(w;T) := \zeta^{ш}(S^t(w);T), \quad \zeta^{*,t}(w;T) := \zeta^{*}(S^t(w);T)$$

によって定める.

定義から $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1[t]$ に対して, t シャッフル関係式

$$\zeta^{ш,t}(w_1;T)\zeta^{ш,t}(w_2;T) = \zeta^{ш,t}(w_1 \overset{t}{ш} w_2;T)$$

が満たされることが分かる.

Proposition 3.3. w_1, w_2 を次数 1 以上の単項式とする. $u_1, u_2 \in \{x, y\}$ に対して,

$$w_1u_1 \overset{t}{ш} w_2u_2 = (w_1u_1 \overset{t}{ш} w_2)u_2 + (w_1 \overset{t}{ш} w_2u_2)u_1$$

が成り立つ.

Proof. t シャッフル積の定義により,

$$\begin{aligned}
w_1u_1 \overset{t}{ш} w_2u_2 &= S^{-t}(S^t(w_1u_1) \,ш\, S^t(w_2u_2)) \\
&= S^{-t}(S^t(w_1)S_1^t(u_1) \,ш\, S_1^t(w_2)S^t(u_2)) \\
&= S^{-t}((S^t(w_1u_1) \,ш\, S_1^t(w_2))S_1^t(u_2) + (S^t(w_1) \,ш\, S^t(w_2u_2))S_1^t(u_1)) \\
&= (w_1u_1 \overset{t}{ш} w_2)u_2 + (w_1 \overset{t}{ш} w_2u_2)u_1
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. □

よって, どちらも次数 2 以上の単項式の場合は t シャッフル積はシャッフル積と全く同様に計算を進められる. 次に片方が次数 1 の場合を考える. $\mathfrak{H}^1$ の次数 1 の単項式は本質的に y しかないから, それを考えれば十分である.

Proposition 3.4. $w \in \mathfrak{H}^1[t]$ の次数を 1 以上とするとき,

$$\begin{aligned}
wu \overset{t}{ш} y &= wu(y - tx) + (w \overset{t}{ш} y)u \\
y \overset{t}{ш} y &= 2y(y - tx)
\end{aligned}$$

Proof. 計算により,

$$\begin{aligned} wu \overset{t}{\sqcup\!\sqcup} y &= S^{-t}(S^t(w)S_1^t(u) \sqcup\!\sqcup y) \\ &= S^{-t}(S^t(wu)y + (S^t(w) \sqcup\!\sqcup y)S_1^t(u)) \\ &= wu(y-tx) + (w \overset{t}{\sqcup\!\sqcup} y)u \end{aligned}$$

であることが分かる. また,

$$y \overset{t}{\sqcup\!\sqcup} y = S^{-t}(y \sqcup\!\sqcup y) = 2y(y-tx)$$

と計算できる. □

3.2 t 調和関係式

Definition 3.5 (t 調和積; Yamamoto [Y])**.** t 調和積 $\overset{t}{*}$ を $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1[t]$ に対して,

$$w_1 \overset{t}{*} w_2 = S^{-t}(S^t(w_1) \sqcup\!\sqcup S^t(w_2))$$

によって定める.

定義から $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1[t]$ に対して, t 調和関係式

$$\zeta^{*,t}(w_1;T)\zeta^{*,t}(w_2;T) = \zeta^{*,t}(w_1 \overset{t}{*} w_2;T)$$

が満たされることが分かる.

Proposition 3.6. (i) $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ が単項式で w_1 の深さが 1 以上であるとする. このとき,

$$w_1 z_{k_1} * w_2 x^{k_2} = (w_1 z_{k_1} * w_2)x^{k_2} + (w_1 * w_2 x^{k_2})z_{k_1} - (w_1 * w_2)z_{k_1+k_2}$$

が成り立つ.

(ii) $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ が単項式で w_1, w_2 の深さが 1 以上であるとする. このとき,

$$w_1 x^{k_1} * w_2 x^{k_2} = (w_1 x^{k_1} * w_2)x^{k_2} + (w_1 * w_2 x^{k_2})x^{k_1} - (w_1 * w_2)x^{k_1+k_2}$$

が成り立つ.

Proof. まず, $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1, 1 \le h$ とするとき,

$$\begin{aligned}(w_1 z_{k_1} * w_2 z_{k_2}) x^h &= ((w_1 z_{k_1} * w_2) z_{k_2} + (w_1 * w_2 z_{k_2}) z_{k_1} + (w_1 * w_2) z_{k_1+k_2}) x^h \\ &= (w_1 z_{k_1} * w_2) z_{k_2+h} + (w_1 * w_2 z_{k_2}) z_{k_1+h} + (w_1 * w_2) z_{k_1+k_2+h} \\ &= w_1 z_{k_1} * w_2 z_{k_2+h} + (w_1 * w_2 z_{k_2}) z_{k_1+h} - (w_1 * w_2 z_{k_2+h}) z_{k_1}\end{aligned}$$

において, $w_2 z_{k_2} \to w_2, h \to k_2$ とすることによって 1 つ目の式が従う.

$$\begin{aligned}&(w_1 z_{k_1} * w_2 z_{k_2}) x^{h_1+h_2} \\ &= ((w_1 z_{k_1} * w_2) z_{k_2} + (w_1 * w_2 z_{k_2}) z_{k_1} + (w_1 * w_2) z_{k_1+k_2}) x^h \\ &= (w_1 z_{k_1} * w_2) z_{k_2+h_1+h_2} + (w_1 * w_2 z_{k_2}) z_{k_1+h_1+h_2} + (w_1 * w_2) z_{k_1+k_2+h_1+h_2} \\ &= (w_1 z_{k_1} * w_2 z_{k_2+h_2}) x^{h_1} + (w_1 z_{k_1+h_1} * w_2 z_{k_2}) x^{h_2} - w_1 z_{k_1+h_1} * w_2 z_{k_2+h_2}\end{aligned}$$

において, $w_1 z_{k_1} \to w_1, w_2 z_{k_2} \to w_2, h_1 \to k_1, h_2 \to k_2$ とすることによって 2 つ目の式が従う. □

Proposition 3.7. $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1[t]$ と正整数 k_1, k_2 に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}w_1 z_{k_1} \overset{t}{*} w_2 z_{k_2} &= (w_1 z_{k_1} \overset{t}{*} w_2) z_{k_2} + (w_1 \overset{t}{*} w_2 z_{k_2}) z_{k_1} + (1-2t)(w_1 \overset{t}{*} w_2) z_{k+l} \\ &\quad + \begin{cases} 0, & \mathrm{wt}(w_1) = \mathrm{wt}(w_2) = 0 \\ t(t-1)(w_1 \overset{t}{*} w_2) x^{k+l}, & \mathrm{wt}(w_1)\mathrm{wt}(w_2) \ne 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Proof. まず, w_1, w_2 がともに深さ 1 以上であるとする.

$$\begin{aligned}&w_1 z_{k_1} \overset{t}{*} w_2 z_{k_2} \\ &= S^{-t}(S^t(w_1 z_{k_1}) * S^t(w_2 z_{k_2})) \\ &= S^{-t}(S^t(w_1)(z_{k_1} + t x^{k_1}) * S^t(w_2)(z_{k_2} + t x^{k_2}))\end{aligned}$$

ここで, $W_1 = S^t(w_1), W_2 = S^t(w_2)$ として, 前の命題を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}&W_1(z_{k_1} + t x^{k_1}) * W_2(z_{k_2} + t x^{k_2}) \\ &= (W_1 z_{k_1} * W_2) z_{k_2} + (W_1 * W_2 z_{k_2}) z_{k_1} + (W_1 * W_2) z_{k_1+k_2} \\ &\qquad + t((W_1 x^{k_1} * W_2) z_{k_2} + (W_1 * W_2 z_{k_2}) x^{k_1} - (W_1 * W_2) z_{k_1+k_2}) \\ &\qquad\qquad + t((W_1 * W_2 x^{k_2}) z_{k_1} + (W_1 z_{k_1} * W_2) x^{k_2} - (W_1 * W_2) z_{k_1+k_2}) \\ &\qquad\qquad\qquad + t^2((W_1 * W_2 x^{k_2}) x^{k_1} + (W_1 x^{k_1} * W_2) x^{k_2} - (W_1 * W_2) x^{k_1+k_2}) \\ &= (W_1(z_{k_1} + t x^{k_1}) * W_2)(z_{k_2} + t x^{k_2}) + (W_1 * W_2(z_{k_2} + t x^{k_2}))(z_{k_1} + t x^{k_1}) \\ &\qquad + (1-2t)(W_1 * W_2)(z_{k_1+k_2} + t x^{k_1+k_2}) + t(t-1)(W_1 * W_2) x^{k_1+k_2}\end{aligned}$$

だから,

$$S^{-t}(W_1(z_{k_1}+tx^{k_1})*W_2(z_{k_2}+tx^{k_2}))$$
$$=(w_1z_{k_1}\overset{t}{*}w_2)z_{k_2}+(w_1\overset{t}{*}w_2z_{k_2})z_{k_1}+(1-2t)(w_1\overset{t}{*}w_2)z_{k+l}+t(t-1)(w_1\overset{t}{*}w_2)x^{k+l}$$

次に, $w_2=1$ の場合, $W_2=1$ として,

$$\begin{aligned}
&W_1(z_{k_1}+tx^{k_1})*W_2z_{k_2}\\
&=(W_1z_{k_1}*W_2)z_{k_2}+(W_1*W_2z_{k_2})z_{k_1}+(W_1*W_2)z_{k_1+k_2}\\
&\qquad+t((W_1x^{k_1}*W_2)z_{k_2}+(W_1*W_2z_{k_2})x^{k_1}-(W_1*W_2)z_{k_1+k_2})\\
&=(W_1(z_{k_1}+tx^{k_1})*W_2)z_{k_2}+(W_1*W_2z_{k_2})(z_{k_1}+tx^{k_1})\\
&\qquad+(1-t)(W_1*W_2)z_{k_1+k_2}\\
&=(W_1(z_{k_1}+tx^{k_1})*W_2)(z_{k_2}+tx^{k_2})+(W_1*W_2z_{k_2})(z_{k_1}+tx^{k_1})\\
&\qquad+(1-2t)(W_1*W_2)(z_{k_1+k_2}+tx^{k_1+k_2})+t(t-1)(W_1*W_2)x^{k_1+k_2}
\end{aligned}$$

より,

$$S^{-t}(W_1(z_{k_1}+tx^{k_1})*W_2z_{k_2})$$
$$=(w_1z_{k_1}\overset{t}{*}w_2)z_{k_2}+(w_1\overset{t}{*}w_2z_{k_2})z_{k_1}+(1-2t)(w_1\overset{t}{*}w_2)z_{k+l}+t(t-1)(w_1\overset{t}{*}w_2)x^{k+l}$$

最後の $w_1=w_2=1$ の場合,

$$\begin{aligned}
S^{-t}(z_{k_1}*z_{k_2})&=S^{-t}(z_{k_1}z_{k_2}+z_{k_2}z_{k_1}+z_{k_1+k_2})\\
&=z_{k_1}z_{k_2}+z_{k_2}z_{k_1}+(1-2t)z_{k_1+k_2}
\end{aligned}$$

となることが分かる. □

特に $t=1$ として以下を得る.

Corollary 3.8 (スター調和積)**.** $\star:=\overset{1}{*}$ とする. $w_1,w_2\in\mathfrak{H}^0$ と正整数 k_1,k_2 に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$w_1z_{k_1}\star w_2z_{k_2}=(w_1z_{k_1}\star w_2)z_{k_2}+(w_1\star w_2z_{k_2})z_{k_1}-(w_1\star w_2)z_{k+l}$$

$t=\frac{1}{2}$ として 2^{dep} の分を調整すると, 以下が得られる.

Corollary 3.9 (ブロックシャッフル積)**.** ともに深さ 1 以上の単項式 $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1[t]$ と正整数 k_1, k_2 に対して,

$$
\begin{aligned}
w \mathbin{\widetilde{ш}} 1 &= 1 \mathbin{\widetilde{ш}} w = w \\
z_{k_1} \mathbin{\widetilde{ш}} z_{k_2} &= z_{k_1} z_{k_2} + z_{k_2} z_{k_1} \\
w_1 z_{k_1} \mathbin{\widetilde{ш}} w_2 z_{k_2} &= (w_1 z_{k_1} \mathbin{\widetilde{ш}} w_2) z_{k_2} + (w_1 \mathbin{\widetilde{ш}} w_2 z_{k_2}) z_{k_1} - (w_1 \mathbin{\widetilde{ш}} w_2) x^{k+l}
\end{aligned}
$$

によって再帰的に双線形な積 $\widetilde{ш}$ を導入する. このとき, $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\zeta^\sharp(w_1)\zeta^\sharp(w_2) = \zeta^\sharp(w_1 \mathbin{\widetilde{ш}} w_2)$$

が成立する.

ともに深さが 1 の場合は

$$\zeta^\sharp(k_1)\zeta^\sharp(k_2) = \zeta^\sharp(k_1, k_2) + \zeta^\sharp(k_2, k_1)$$

となる. 深さ 2 と深さ 1 の場合は

$$\zeta^\sharp(k_1, k_2)\zeta^\sharp(k_3) = \zeta^\sharp(k_1, k_2, k_3) + \zeta^\sharp(k_1, k_3, k_2) + \zeta^\sharp(k_3, k_1, k_2) - \zeta^\sharp(k_1 + k_2 + k_3)$$

となり, この場合には深さが 2 の項が現れないことが特徴的である. 一般に深さ r と深さ s のインデックスのブロックシャッフル積には, $r+s$ と偶奇が同じ深さの項しか現れないことが分かる.

t シャッフルと t 調和積から, 通常の多重ゼータ値の場合と全く同様に以下が分かる.

Corollary 3.10 (t 正規化複シャッフル関係式; Li-Qin [LQ1, Theorem 2.4])**.** $w_0 \in \mathfrak{H}^0[t], w_1 \in \mathfrak{H}^1[t]$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\zeta^{ш,t}(w_0 \overset{t}{ш} w_1; T) &= \zeta^{ш,t}(w_0 \overset{t}{*} w_1; T) \\
\zeta^{*,t}(w_0 \overset{t}{ш} w_1; T) &= \zeta^{*,t}(w_0 \overset{t}{*} w_1; T)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

実際に t 複シャッフル関係式から t 多重ゼータ値の関係式族を導出するのは, 複雑になりやすいためあまり行われていない印象を受ける.

4 t-Ohno 型関係式

4.1 t-Ohno 型関係式

Theorem 4.1 (t-Ohno 型関係式; Hirose-Murahara-Ono [HMO, Theorem 1.4])**.** 許容インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と非負整数 h に対して,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}^\dagger)}\\|\boldsymbol{e}|=h}}\zeta^t((\boldsymbol{k}^\dagger\oplus\boldsymbol{e})^\dagger)\\
&=\sum_{\boldsymbol{l}\preceq\boldsymbol{k}}(t(t-1))^{r-\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}\sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_s\\|\boldsymbol{e}|=h}}\left(\prod_{i=1}^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}f_{I_i}(l_i+\delta_{i,1};e_i)\right)\zeta^t(\boldsymbol{l}\oplus\boldsymbol{e})
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで, $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタである．I_i は $\boldsymbol{k}$ を縮約して $\boldsymbol{l}$ になる際に l_i に足し合わされている $\boldsymbol{k}$ の成分の個数から 1 を引いたものであり, $f_i(k;e)$ は

$$f_i(k;e):=\sum_{j=0}^{e}\binom{e-j}{i}\binom{k+e-i-2}{j}t^j(1-t)^{e-i-j}$$

で定義される．

Proof. $\mathfrak{H}[[u,t]]$ の同型 σ を $\sigma(x)=x,\sigma(y)=y\frac{1}{1-xu}$ によって定義する．直接計算によって,

$$\begin{aligned}
&S^{-t}\sigma\tau\sigma^{-1}\tau S^t\tau\sigma\tau(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1})\\
&=y\frac{1}{1-xu}\left(\frac{x}{1-xtu}\right)^{k_1-1}\prod_{i=2}^{r}\left(y\frac{1-xtu}{1-xu}+\frac{x^2ut(t-1)}{1-xu}\right)\left(\frac{x}{1-xtu}\right)^{k_i-1}\\
&=\sum_{\boldsymbol{l}\preceq\boldsymbol{k}}(t(t-1))^{r-\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}y\frac{u^{I_1}}{(1-xu)^{I_1+1}}\frac{x^{l_1+I_1-1}}{(1-xtu)^{l_1-I_1-1}}\\
&\qquad\cdot\prod_{i=2}^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}y\frac{u^{I_i}}{(1-xu)^{I_i+1}}\frac{x^{l_i+I_i-1}}{(1-xtu)^{l_i-I_i-2}}
\end{aligned}$$

ここで,

$$y\frac{1}{(1-xu)^{i+1}}\frac{x^{k+i-1}u^i}{(1-xtu)^{k-i-2}}=\sum_{0\le e}yx^{k+e-1}u^e\sum_{j=0}^{e-i}\binom{e-i}{j}\binom{k-i+j-3}{j}t^j$$

であり, 超幾何級数の Pfaff 変換によって,

$$\sum_{j=0}^{e-i}\binom{e-i}{j}\binom{k-i+j-3}{j}t^j=\sum_{j=0}^{e-i}\binom{e-j}{i}\binom{k+e-i-2}{j}t^j(1-t)^{e-i-j}=f_i(k;e)$$

であるから,

$$y\frac{1}{(1-xu)^{i+1}}\frac{x^{k+i-1}u^i}{(1-xtu)^{k-i-2}}=\sum_{0\le e}yx^{k+e-1}u^e f_i(k;e)$$

である. k を 1 ずらして,

$$y\frac{1}{(1-xu)^{i+1}}\frac{x^{k+i-1}u^i}{(1-xtu)^{k-i-1}}=\sum_{0\le e}yx^{k+e-1}u^e f_i(k+1;e)$$

であるから,

$$\begin{aligned}&S^{-t}\sigma\tau\sigma^{-1}\tau S^t\tau\sigma\tau(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1})\\&=\sum_{\boldsymbol{l}\preceq\boldsymbol{k}}(t(t-1))^{r-\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}y\frac{u^{I_1}}{(1-xu)^{I_1+1}}\frac{x^{l_1+I_1-1}}{(1-xtu)^{l_1-I_1-1}}\\&\quad\cdot\prod_{i=2}^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}y\frac{u^{I_i}}{(1-xu)^{I_i+1}}\frac{x^{l_i+I_i-1}}{(1-xtu)^{l_i-I_i-2}}\\&=\sum_{0\le h}u^h\sum_{\boldsymbol{l}\preceq\boldsymbol{k}}(t(t-1))^{r-\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}\sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_s\\|\boldsymbol{e}|=h}}\left(\prod_{i=1}^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{l})}f_{I_i}(l_i+\delta_{i,1};e_i)\right)\zeta^t(\boldsymbol{l}\oplus\boldsymbol{e})\end{aligned}$$

と展開される. 一方, 多重ゼータ値の導分関係式から,

$$\begin{aligned}\zeta^t(S^{-t}\sigma\tau\sigma^{-1}\tau S^t\tau\sigma\tau(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}))&=\zeta(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau S^t\tau\sigma\tau(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}))\\&=\zeta(S^t\tau\sigma\tau(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}))\\&=\zeta^t(\tau\sigma\tau(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1})\\&=\sum_{0\le h}u^h\sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}^\dagger)}\\|\boldsymbol{e}|=h}}\zeta^t((\boldsymbol{k}^\dagger\oplus\boldsymbol{e})^\dagger)\end{aligned}$$

となるから, u^h の係数を比較して定理を得る. □

t-Ohno 型関係式は非常に複雑な式に見えるが, 要約すると,

$$\sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}^\dagger)}\\|\boldsymbol{e}|=h}}\zeta^t((\boldsymbol{k}^\dagger\oplus\boldsymbol{e})^\dagger)$$

という和が $\boldsymbol{k}$ の深さ以下の多重ゼータ値で表されるということを示している．例えば, $\boldsymbol{k}$ を深さ 1 とすれば, t-Ohno 型関係式の右辺は深さ 1 になり, Riemann ゼータ値で表されることが分かる．これは t-Ohno 型関係式が t 和公式の一般化であることを示している．

$t=1$ として以下を得る．

Corollary 4.2 (スター Ohno 型関係式; Hirose-Imatomi-Murahara-Saito [HIMS, Theorem 1.5])**.** 許容インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と非負整数 h に対して,

$$\sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}^\dagger)}\\ |\boldsymbol{e}|=h}} \zeta^\star((\boldsymbol{k}^\dagger\oplus\boldsymbol{e})^\dagger) = \sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_r\\ |\boldsymbol{e}|=h}} \left(\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i+e_i+\delta_{i,1}-2}{e_i}\right)\zeta^\star(\boldsymbol{k}\oplus\boldsymbol{e})$$

が成り立つ．ここで, $\binom{n-1}{n}=\delta_{n,0}$ と見なすものとする．

これは一般の t-Ohno 型関係式と比較してかなり綺麗になっていることが分かる．

4.2 t-Hoffman の関係式

以下が得られる．

Corollary 4.3 (t-Hoffman の関係式; Li-Qin [LQ1, Theorem 2.5], Wakabayashi [W, Corollary 1.2])**.** インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}(1+(k_i-2+\delta_{i,1})t)\zeta^t(k_1,\dots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\dots,k_r)\\
&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta^t(k_1,\dots,k_{i-1},j+1,k_i-j,k_{i+1},\dots,k_r)\\
&\qquad+t(1-t)\sum_{i=1}^{r-1}\zeta^t(k_1,\dots,k_{i-1},k_i+k_{i+1}+1,k_{i+1},\dots,k_r)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

特に $t=0$ とすると以下が得られる．

Corollary 4.4 (Hoffman の関係式; Hoffman [H, Theorem 5.1])**.** インデックス $\boldsymbol{k}=$

$(k_1,\ldots,k_r)$ に対して,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}\zeta(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_r)\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta(k_1,\ldots,k_{i-1},j+1,k_i-j,k_{i+1},\ldots,k_r)\end{aligned}$$

が成り立つ.

$t=1$ とすると以下が得られる.

Corollary 4.5 (スター Hoffman の関係式; Muneta [M, Theorem 3.2])**.** インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}(k_i-1+\delta_{i,1})\zeta^{\star}(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_r)\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta^{\star}(k_1,\ldots,k_{i-1},j+1,k_i-j,k_{i+1},\ldots,k_r)\end{aligned}$$

が成り立つ.

t-Hoffman の関係式は, t 正規化複シャッフル関係式において, 片方に y を用いることによって比較的簡単に示すことができる.

5 t-Ohno-Zagier の関係式

5.1 t 対称和公式

Definition 5.1 (集合の分割)**.** 互いに素な集合 $P_1,\ldots,P_r\subset A$ が

$$A=\bigcup_{i=1}^{r}P_i$$

を満たしているとき, $\{P_1,\ldots,P_r\}$ を A の分割という. このとき, $\{P_1,\ldots,P_r\}\vdash A$ と表す. また, $|A|$ で A の要素数を表すものとして, $[n]:=\{1,2,\ldots,n\}$ と定義する.

Theorem 5.2. $\mathfrak{H}^1[t]$ における等式

$$S^t\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(n)}}\right)$$
$$= \sum_{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n]} z_{\sum_{i\in P_1}k_i} * \cdots * z_{\sum_{i\in P_r}k_i}\prod_{i=1}^{r}(|P_i|-1)!(t^{|P_i|}-(t-1)^{|P_i|})$$

が成り立つ. ただし, $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群とする.

Proof. 両辺に S^{-t} を作用させた式,

$$\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(n)}}\right)$$
$$= \sum_{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n]} z_{\sum_{i\in P_1}k_i} \overset{t}{*} \cdots \overset{t}{*} z_{\sum_{i\in P_r}k_i}\prod_{i=1}^{r}(|P_i|-1)!(t^{|P_i|}-(t-1)^{|P_i|})$$

を n に関する帰納法で示す. $n=2$ のとき,

$$z_{k_1}\overset{t}{*}z_{k_2} = z_{k_1}z_{k_2}+z_{k_2}z_{k_1}+(1-2t)z_{k_1+k_2}$$

より分かる. n まで成り立つと仮定する. t 調和積の計算により,

$$\begin{aligned}
&z_{k_{n+1}}\overset{t}{*}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(n)}}\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{i=1}^{n+1} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(i-1)}}z_{k_{n+1}}z_{k_{\sigma(i)}}\cdots z_{k_{\sigma(n)}}\\
&\qquad+(1-2t)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{i=1}^{n} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(i-1)}}z_{k_{\sigma(i)}+k_{n+1}}z_{k_{\sigma(i+1)}}\cdots z_{k_{\sigma(n)}}\\
&\qquad\qquad+t(t-1)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{i=1}^{n-1} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(i-1)}}z_{k_{\sigma(i)}+k_{\sigma(i+1)}+k_{n+1}}z_{k_{\sigma(i+2)}}\cdots z_{k_{\sigma(n)}}\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(n+1)}}\\
&\qquad+(1-2t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} z_{k^{(i)}_{\sigma(1)}}\cdots z_{k^{(i)}_{\sigma(n)}}+2t(t-1)\sum_{0<i<j\leq n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}} z_{k^{(i,j)}_{\sigma(1)}}\cdots z_{k^{(i,j)}_{\sigma(n-1)}}
\end{aligned}$$

が得られる. ここで,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}^{(i)} &:= (k_1,\dots,k_{i-1},k_i+k_{n+1},k_{i+1},\dots,k_r)\\
\boldsymbol{k}^{(i,j)} &:= (k_i+k_j+k_{n+1},k_1,\dots,k_{i-1},k_{i+1},\dots,k_{j-1},k_{j+1},\dots,k_n)
\end{aligned}$$

によって定義されるものとする. 帰納法の仮定から,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(n+1)}}\\
&= z_{k_{n+1}} \overset{t}{*} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(n)}}\\
&\qquad + (2t-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} z_{k^{(i)}_{\sigma(1)}}\cdots z_{k^{(i)}_{\sigma(n)}} + 2t(1-t)\sum_{0<i<j\le n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}} z_{k^{(i,j)}_{\sigma(1)}}\cdots z_{k^{(i,j)}_{\sigma(n-1)}}\\
&= \sum_{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n]} \left(\prod_{l=1}^{r}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|})\right) z_{\sum_{l\in P_1}k_l} \overset{t}{*}\cdots\overset{t}{*} z_{\sum_{l\in P_r}k_l} \overset{t}{*} z_{k_{n+1}}\\
&\qquad + (2t-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n]} \left(\prod_{l=1}^{r}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|})\right)\\
&\qquad\qquad \cdot z_{\sum_{l\in P_1}k^{(i)}_l} \overset{t}{*}\cdots\overset{t}{*} z_{\sum_{l\in P_r}k^{(i)}_l}\\
&\qquad + 2t(1-t)\sum_{0<i<j\le n}\sum_{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n]} \left(\prod_{l=1}^{r}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|})\right)\\
&\qquad\qquad \cdot z_{\sum_{l\in P_1}k^{(i,j)}_l} \overset{t}{*}\cdots\overset{t}{*} z_{\sum_{l\in P_r}k^{(i,j)}_l}
\end{aligned}
$$

これは, $P_1,\dots,P_r$ を並び変えて, P_r に $n+1$ が含まれているものとして, 以下のように書き直すことができる.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n+1]\\ P_r=\{n+1\}}} \left(\prod_{l=1}^{r}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|})\right) z_{\sum_{l\in P_1}k_l} \overset{t}{*}\cdots\overset{t}{*} z_{\sum_{l\in P_r}k_l}\\
&\qquad + (2t-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n+1]\\ i,n+1\in P_r}} \left(\prod_{l=1}^{r-1}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|})\right)\\
&\qquad\qquad \cdot (|P_r|-2)!(t^{|P_r|-2}-(t-1)^{|P_r|-2}) z_{\sum_{l\in P_1}k_l} \overset{t}{*}\cdots\overset{t}{*} z_{\sum_{l\in P_r}k_l}\\
&\qquad + 2t(1-t)\sum_{0<i<j\le n}\sum_{\substack{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n+1]\\ i,j,n+1\in P_r}} \left(\prod_{l=1}^{r-1}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|})\right)\\
&\qquad\qquad \cdot (|P_r|-3)!(t^{|P_r|-3}-(t-1)^{|P_r|-3}) z_{\sum_{l\in P_1}k_l} \overset{t}{*}\cdots\overset{t}{*} z_{\sum_{l\in P_r}k_l}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$z_{\sum_{l\in P_1} k_l} \overset{t}{*} \cdots \overset{t}{*} z_{\sum_{l\in P_r} k_l}$$

の係数を考えると, $P_r = \{n+1\}$ のとき,

$$\prod_{l=1}^{r}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|})$$

となる. $|P_r| = 2$ のときの係数を考えると,

$$(2t-1)\prod_{l=1}^{r-1}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|}) = \prod_{l=1}^{r}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|})$$

となることが分かる. $3 \leq |P_r|$ のときの係数を考えると, $m = |P_r|$ として, 第 2 項は i が $m-1$ 通りの選ばれ方があり, 第 3 項は i, j が $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ 通りの選ばれ方があることから, 合わせて

$$\begin{aligned}
&(2t-1)(m-1)\cdot(m-2)!(t^{m-2}-(t-1)^{m-2})\prod_{l=1}^{r-1}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|}) \\
&\qquad + \frac{(m-1)(m-2)}{2}(m-3)!2t(1-t)(t^{m-3}-(t-1)^{m-3}) \\
&\qquad \cdot \prod_{l=1}^{r-1}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|}) \\
&= (m-1)!(t^{m-1}-(t-1)^{m-1})\prod_{l=1}^{r-1}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|}) \\
&= \prod_{l=1}^{r}(|P_l|-1)!(t^{|P_l|}-(t-1)^{|P_l|})
\end{aligned}$$

となることから,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}} z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(n+1)}} \\
&= \sum_{\{P_1,\ldots,P_r\}\vdash[n+1]} z_{\sum_{i\in P_1} k_i} \overset{t}{*} \cdots \overset{t}{*} z_{\sum_{i\in P_r} k_i} \prod_{i=1}^{r}(|P_i|-1)!(t^{|P_i|}-(t-1)^{|P_i|})
\end{aligned}$$

が示される. □

両辺に $\zeta^{*,t}$ を作用させて以下を得る.

Corollary 5.3 (t 対称和公式; Li [L, Theorem 3.2]). 正整数 n に対して, $\mathbb{C}[t]$ における等式

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\zeta^{*,t}(\boldsymbol{k})=\sum_{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n]}\zeta\left(\sum_{i\in P_1}k_i\right)\cdots\zeta\left(\sum_{i\in P_r}k_i\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}(|P_i|-1)!(t^{|P_i|}-(t-1)^{|P_i|})$$

が成り立つ.

特に $t=0,\frac{1}{2},1$ とすると以下を得る.

Corollary 5.4. 正整数 n に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\zeta^{*}(\boldsymbol{k})=\sum_{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n]}\zeta^{*}\left(\sum_{i\in P_1}k_i\right)\cdots\zeta^{*}\left(\sum_{i\in P_r}k_i\right)\prod_{i=1}^{r}(-1)^{|P_i|-1}(|P_i|-1)!$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\zeta^{*,\sharp}(\boldsymbol{k})=\sum_{\substack{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n]\\|P_i|=1\bmod 2}}\zeta^{*,\sharp}\left(\sum_{i\in P_1}k_i\right)\cdots\zeta^{*,\sharp}\left(\sum_{i\in P_r}k_i\right)\prod_{i=1}^{r}(|P_i|-1)!$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\zeta^{*,\star}(\boldsymbol{k})=\sum_{\{P_1,\dots,P_r\}\vdash[n]}\zeta^{*,\star}\left(\sum_{i\in P_1}k_i\right)\cdots\zeta^{*,\star}\left(\sum_{i\in P_r}k_i\right)\prod_{i=1}^{r}(|P_i|-1)!$$

Definition 5.5. $w_1,w_2,w\in\mathfrak{H}^1$ と正整数 k_1,k_2 に対して,

$$w ш 1_{\mathfrak{H}}=1_{\mathfrak{H}} ш w=w$$
$$w_1z_{k_1} ш w_2z_{k_2}=(w_1z_{k_1} ш w_2)z_{k_2}+(w_1 ш w_2z_{k_2})z_{k_1}$$

と双線形な積 $ш$ を定義する.

これは z_k をひとかたまりと見なしたシャッフル積である. 具体例を挙げると

$$(1,2) ш (3)=(1,2,3)+(1,3,2)+(3,1,2)$$

のようになる. この積を用いることによって, 対称和は

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}z_{k_{\sigma(1)}}\cdots z_{k_{\sigma(n)}}=z_{k_1} ш \cdots ш z_{k_n}$$

と簡潔に表すことができる.

5.2 t-Ohno-Zagier の関係式

Definition 5.6. ∞ における Pochhammer 記号をガンマ関数を用いて

$$(1+t)_\infty := \frac{1}{e^{\gamma t}\Gamma(1+t)} = \sum_{0\le n} \zeta^*(\{1\}^n)t^n$$

によって定義する. $(a_1,\dots,a_r)_\infty := (a_1)_\infty \cdots (a_r)_\infty$ のような表記を用いることにする.

Proposition 5.7. $\mathbb{C}[[u,v,w]]$ における等式

$$\sum_{0\le k,r,s} u^{k-r-s}v^{r-s}w^s \sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)} \zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k-u)(k+v)+w}{k(k-u)}$$

$$\sum_{0\le k,r,s} u^{k-r-s}v^{r-s}w^s \sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)} \zeta^\star_{<n}(\boldsymbol{k}) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k(k-u)}{(k-u)(k-v)-w}$$

が成り立つ. ここで $I(k,r,s)$ は重さ k, 深さ r, 高さ s のインデックス全体の集合を表す.

Proof. 1 つ目の式は以下の計算によって示される.

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le k,r,s} u^{k-r-s}v^{r-s}w^s \sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)} \zeta_{<n}(\boldsymbol{k}) \\
&= \sum_{0\le a,b,s} u^b v^a w^s \sum_{\substack{0\le a_1,\dots,a_s,|\boldsymbol{a}|=a \\ 0\le b_1,\dots,b_s,|\boldsymbol{b}|=b}} \zeta_{<n}(\{1\}^{a_1}, b_1+2,\dots,\{1\}^{a_s}, b_s+2) \\
&= \sum_{0\le s} w^s \sum_{0<n_1<\cdots<n_s<n} \left(\prod_{\substack{0<k<n \\ k\le n_1,\dots,k\le n_s}} \left(1+\frac{v}{k}\right)\right) \frac{1}{n_1(n_1-u)}\cdots\frac{1}{n_s(n_s-u)} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+v}{k} \sum_{0\le s} w^s \sum_{0<n_1<\cdots<n_s<n} \frac{1}{(n_1+v)(n_1-u)}\cdots\frac{1}{(n_s+v)(n_s-u)} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+v}{k}\left(1+\frac{w}{(k+v)(k-u)}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k-u)(k+v)+w}{k(k-u)}
\end{aligned}$$

2 つ目の式は以下の計算によって示される.

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le k,r,s} u^{k-r-s}v^{r-s}w^s \sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)} \zeta^\star_{<n}(\boldsymbol{k}) \\
&= \sum_{0\le a,b,s} u^b v^a w^s \sum_{\substack{0\le a_1,\dots,a_s,|\boldsymbol{a}|=a\\ 0\le b_1,\dots,b_s,|\boldsymbol{b}|=b}} \zeta^\star_{<n}(\{1\}^{a_1}, b_1+2,\dots,\{1\}^{a_s}, b_s+2) \\
&= \sum_{0\le s} w^s \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_s<n} \frac{1}{n_1(n_1-u)}\cdots\frac{1}{n_s(n_s-u)} \\
&\qquad \cdot \prod_{0<k\le n_1}\left(1-\frac{v}{k}\right)^{-1} \prod_{n_1\le k\le n_2}\left(1-\frac{v}{k}\right)^{-1}\cdots \prod_{n_r\le k<n}\left(1-\frac{v}{k}\right)^{-1} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{v}{k}\right)^{-1} \sum_{0\le s} w^s \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_s<n} \frac{1}{(n_1-v)(n_1-u)}\cdots\frac{1}{(n_s-v)(n_s-u)} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{v}{k}\right)^{-1}\left(1-\frac{w}{(k-v)(k-u)}\right)^{-1} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\frac{k(k-u)}{(k-u)(k-v)-w}
\end{aligned}$$

□

$I(0,0,0)$ は空集合ではなく空インデックスを含んでいることに注意する必要がある.

Proposition 5.8. 非負整数 k, r, s に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)} S^t(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{0\le k_1,k_2,k_1+k_2=k\\ 0\le r_1,r_2,r_1+r_2=r\\ 0\le s_1,s_2,s_1+s_1=s}} (1-t)^{r_1}t^{r_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}_1\in I(k_1,r_1,s_1)\\ \boldsymbol{k}_2\in I(k_2,r_2,s_2)}} \boldsymbol{k}_1 * S(\boldsymbol{k}_2)$$

が成り立つ.

Proof. まず, 余積

$$\Delta^*(\boldsymbol{k}) = \sum_{i=0}^{r}(k_1,\dots,k_i)\otimes(k_{i+1},\dots,k_r)$$

を考えると,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)} \Delta^*(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{0\le k_1,k_2,k_1+k_2=k\\ 0\le r_1,r_2,r_1+r_2=r\\ 0\le s_1,s_2,s_1+s_1=s}} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}_1\in I(k_1,r_1,s_1)\\ \boldsymbol{k}_2\in I(k_2,r_2,s_2)}} \boldsymbol{k}_1\otimes\boldsymbol{k}_2$$

が成り立つことが分かる. これより, 写像 f を

$$f(\boldsymbol{k}_1 \otimes \boldsymbol{k}_2) = (1-t)^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}_1)} t^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}_2)} \boldsymbol{k}_1 * S(\boldsymbol{k}_2)$$

によって定め,

$$(f \circ \Delta^*) \left(\sum_{\boldsymbol{k} \in I(k,r,s)} \boldsymbol{k} \right) = S^t \left(\sum_{\boldsymbol{k} \in I(k,r,s)} \boldsymbol{k} \right)$$

を示せばよい. 前の命題より,

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I(k,r,s)} \boldsymbol{k}$$

は深さ 1 の元のいくつかの調和積によって生成されることが分かるから, 対称和公式より, インデックス $\boldsymbol{k}$ に対する

$$w = z_{k_1} ш \cdots ш z_{k_n}$$

に対して

$$(f \circ \Delta^*) (w) = S^t (w)$$

が成り立つことを示せばよい. これは t 対称和公式を用いた計算により,

$$\begin{aligned}
S^t(w) &= \sum_{\{P_1,\dots,P_r\} \in \mathcal{P}_n} z_{\sum_{i\in P_1} k_i} * \cdots * z_{\sum_{i \in P_r} k_i} \prod_{i=1}^{r} (|P_i|-1)!(t^{|P_i|} - (t-1)^{|P_i|}) \\
&= \sum_{\substack{\{P_1,\dots,P_r\} \vdash [n] \\ \{I,J\} \vdash [r]}} \left(\prod_{i \in I} (|P_i|-1)! t^{|P_i|} \right) \left(\prod_{j \in J} (|P_j|-1)!(-1)^{|P_j|-1}(1-t)^{|P_j|} \right) \\
&\qquad \cdot z_{\sum_{i\in P_1} k_i} * \cdots * z_{\sum_{i \in P_r} k_i} \\
&= \sum_{\substack{\{A,B\} \vdash [n] \\ \{P_1,\dots,P_r\} \vdash A \\ \{Q_1,\dots,Q_s\} \vdash B}} \left(\prod_{i=1}^{r} (|P_i|-1)!(-1)^{|P_i|-1}(1-t)^{|P_i|} \right) \left(\prod_{j=1}^{s} (|Q_j|-1)! t^{|Q_j|} \right) \\
&\qquad \cdot \left(z_{\sum_{i\in P_1} k_i} * \cdots * z_{\sum_{i \in P_r} k_i} \right) * \left(z_{\sum_{j\in Q_1} k_j} * \cdots * z_{\sum_{j \in Q_s} k_j} \right) \\
&= \sum_{\{\{i_1,\dots,i_r\},\{j_1,\dots,j_s\}\} \vdash [n]} (1-t)^r (z_{k_{i_1}} ш \cdots ш z_{k_{i_r}}) * t^s S(z_{k_{j_1}} ш \cdots ш z_{k_{j_s}}) \\
&= f \left(\sum_{\{\{i_1,\dots,i_r\},\{j_1,\dots,j_s\}\} \vdash [n]} (z_{k_{i_1}} ш \cdots ш z_{k_{i_r}}) \otimes (z_{k_{j_1}} ш \cdots ш z_{k_{j_s}}) \right) \\
&= f\left(\Delta^*(w)\right)
\end{aligned}$$

となることから示される. □

これを $\zeta_{<n}$ に適用すると, 以下が得られる.

Corollary 5.9. $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\zeta^t_{<n}(w) := \zeta_{<n}(S^t(w))$$

とする. 正整数 n と $\mathbb{C}[[u,v,w]][t]$ において以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{0\le k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)}\zeta^t_{<n}(\boldsymbol{k})\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^s = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k-u)(k+(1-t)v)+w(1-t)}{(k-u)(k-vt)-wt}$$

これを ζ^* に適用し, 正規化定理を用いることによって以下が従う.

Corollary 5.10. $\mathbb{C}[[u,v,w]]$ において, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{0\le k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)}\zeta^{ш,t}(\boldsymbol{k};T)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^s = e^{Tv}\frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-\gamma,1-\delta,1+v)_\infty}$$

$$\sum_{0\le k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)}\zeta^{*,t}(\boldsymbol{k};T)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^s = e^{Tv}\frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-\gamma,1-\delta)_\infty}$$

Proposition 5.11. $\mathfrak{H}^1[[u,v,w]][t]$ において, 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}S^t(z_{k_1}\cdots z_{k_r})\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\\
&=\left(\sum_{0\le k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)}S^t(z_{k_1}\cdots z_{k_r})\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^s\right)\\
&\quad\cdot\left(\sum_{0<k,r,s}z_k\binom{r-1}{s-1}\binom{k-r-1}{s-1}t^{r-1}u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\right)
\end{aligned}$$

Proof. まず,

$$S^t(z_{k_1}\cdots z_{k_r}) = \sum_{i=0}^{r-1}S^t(z_{k_1}\cdots z_{k_i})z_{k_{i+1}+\cdots+k_r}t^{r-i-1}$$

である. これを用いて,

$$
\begin{aligned}
&S^t(y^{a_1+1}x^{b_1+1}\cdots y^{a_s+1}x^{b_s+1})\\
&= \sum_{\substack{0\le i<s\\ 0\le h\le a_{i+1}}} S^t(y^{a_1+1}x^{b_1+1}\cdots y^{a_i+1}x^{b_i+1}y^h)\\
&\qquad \cdot z_{(a_{i+1}+b_{i+1}+2)+\cdots+(a_s+b_s+2)-h}\, t^{(a_{i+1}+1)+\cdots+(a_s+1)-1}
\end{aligned}
$$

が得られるから,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)} S^t(z_{k_1}\cdots z_{k_r})\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\\
&= \sum_{0<s,0\le a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_s,s} S^t(y^{a_1+1}x^{b_1+1}\cdots y^{a_s+1}x^{b_s+1})u^{|\boldsymbol{b}|}v^{|\boldsymbol{a}|}w^{s-1}\\
&= \sum_{\substack{0\le s_1,0<s_2\\ 0\le a_1,\ldots,a_{s_1},b_1,\ldots,b_{s_2}\\ 0\le c_1,\ldots,c_{s_2},d_1,\ldots,d_{s_2},h}} S^t(y^{a_1+1}x^{b_1+1}\cdots y^{a_{s_1}+1}x^{b_{s_1}+1}y^h)\\
&\qquad \cdot z_{(c_1+d_1+2)+\cdots+(c_{s_2}+d_{s_2}+2)}t^{(c_1+1)+\cdots+(c_{s_2}+1)-1}u^{|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{d}|}v^{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{c}|+h}w^{s_1+s_2-1}\\
&= \left(\sum_{0\le k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)} S^t(z_{k_1}\cdots z_{k_r})\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s}\right)\\
&\qquad \cdot \left(\sum_{0<k,r,s} z_k\binom{r-1}{s-1}\binom{k-r-1}{s-1}t^{r-1}u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\right)
\end{aligned}
$$

と示される. □

Theorem 5.12 (Li-Qin [LQ1, Proposition 3.2])**.**

$$
\begin{aligned}
&\alpha+\beta=u+vt,\quad \alpha\beta=t(uv-w)\\
&\gamma+\delta=-u+v(1-t),\quad \gamma\delta=(t-1)(uv-w)
\end{aligned}
$$

とすると, $\mathbb{C}[[u,v,w]]$ において,

$$
\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^t(\boldsymbol{k})\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}=\frac{1}{\gamma\delta}\sum_{0<n}\frac{(\gamma,\delta)_n}{(1-\alpha,1-\beta)_n}
$$

が成り立つ. ここで, $I_0(k,r,s)$ は重さ k, 深さ r, 高さ s の許容インデックス全体の集合を表す.

Proof. 前二つの命題から,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^t_{<n}(\boldsymbol{k})\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\\
&=\sum_{0<m}\left(\sum_{0\le k,r,s}u^{k-r-s}v^{r-s}w^s\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r,s)}\zeta^t_{<m}(\boldsymbol{k})\right)\\
&\qquad\cdot\left(\sum_{0<k,r,s}\frac{1}{m^k}\binom{r-1}{s-1}\binom{k-r-1}{s-1}t^{r-1}u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\right)\\
&=\sum_{0<m}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{(k-u)(k+(1-t)v)+w(1-t)}{(k-u)(k-vt)-wt}\sum_{0<r,s}\frac{1}{m^r(m-u)^s}\binom{r-1}{s-1}t^{r-1}v^{r-s}w^{s-1}\\
&=\sum_{0<m}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{(k+\gamma)(k+\delta)}{(k-\alpha)(k-\beta)}\sum_{0<s}\frac{1}{(m-vt)^s(m-u)^s}(wt)^{s-1}\\
&=\frac{1}{\gamma\delta}\sum_{0<m}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{(k+\gamma)(k+\delta)}{(1+k-\alpha)(1+k-\beta)}
\end{aligned}
$$

となって示される. □

$t=0$ の場合は Riemann ゼータだけで表すことができたが, 他の t の場合は一般には表せないと思われる.

Theorem 5.13 (Dougall の和公式; Dougall [D])**.** $\mathrm{Re}(c+d-a-b)>1$ のとき,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(a,b)_n}{(c,d)_n}=\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-b)}$$

これらを用いることで以下を証明できる.

Theorem 5.14.

$$
\begin{aligned}
&\alpha+\beta=u+vt,\alpha\beta=t(uv-w)\\
&\gamma+\delta=-u+v(1-t),\gamma\delta=(t-1)(uv-w)
\end{aligned}
$$

として,

$$\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}((1-t)\zeta^t(\boldsymbol{k})+(-1)^{k-r}t\zeta^{1-t}(\boldsymbol{k}))\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}$$
$$=\frac{1}{uv-w}\left(1-\frac{(1-\alpha-\gamma,1-\alpha-\delta,1-\beta-\gamma,1-\beta-\delta)_\infty}{(1-\alpha,1-\beta,1-\gamma,1-\delta,1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)_\infty}\right)$$

が成り立つ. 特に,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}((1-t)\zeta^t(\boldsymbol{k})+(-1)^{k-r}t\zeta^{1-t}(\boldsymbol{k}))\in\mathbb{Q}[t,\pi^2,\zeta(3),\zeta(5),\dots]$$

となる.

Proof. 上の定理を用いて,

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}((1-t)\zeta^t(\boldsymbol{k})+(-1)^{k-r}t\zeta^{1-t}(\boldsymbol{k}))\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\\
&=\frac{1}{uv-w}\left(-\sum_{0<n}\frac{(\gamma,\delta)_n}{(1-\alpha,1-\beta)_n}-\sum_{0<n}\frac{(\alpha,\beta)_n}{(1-\gamma,1-\delta)_n}\right)\\
&=\frac{1}{uv-w}\left(1-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(\gamma,\delta)_n}{(1-\alpha,1-\beta)_n}\right)\\
&=\frac{1}{uv-w}\left(1-\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1-\alpha-\delta)\Gamma(1-\beta-\gamma)\Gamma(1-\beta-\delta)}\right)\\
&=\frac{1}{uv-w}\left(1-\frac{(1-\alpha-\gamma,1-\alpha-\delta,1-\beta-\gamma,1-\beta-\delta)_\infty}{(1-\alpha,1-\beta,1-\gamma,1-\delta,1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)_\infty}\right)
\end{aligned}$$

と示される. □

Corollary 5.15.

$$\alpha+\beta=u+v,\alpha\beta=uv-w$$
$$\gamma+\delta=-u+v,\gamma\delta=w-uv$$

としたとき,

$$\sum_{\substack{0<k,r,s\\k=r \bmod 2}}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^\sharp(\boldsymbol{k})\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}$$
$$=\frac{1}{uv-w}\left(1-\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1-\alpha-\delta)\Gamma(1-\beta-\gamma)\Gamma(1-\beta-\delta)}\right)$$

特に, $k = r \pmod 2$ のとき,

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I_0(k,r,s)} \zeta^\sharp(\boldsymbol{k}) \in \mathbb{Q}[\pi^2, \zeta(3), \zeta(5), \ldots]$$

となる.

特に高さが 1 の場合は以下のようになる.

Corollary 5.16. $\mathbb{C}[[u,v]]$ において以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{0<n,m} \zeta^\sharp(\{1\}^{n-1}, 2m+1) u^n v^{2m} = 1 - \frac{\Gamma(1-u)\Gamma(1-v)}{\Gamma(1-u-v)} \frac{\Gamma(1-u)\Gamma(1+v)}{\Gamma(1-u+v)}$$

これは, 高さが 1 で全て奇数からなるインデックスにおける $\zeta^\sharp$ の値が Riemann ゼータ値で書けることを示している.

5.3 Li の双対定理

Definition 5.17. Φ_0^t を u, v, w に対して,

$$\Phi_0^t(u,v,w) := \sum_{0<k,r,s} \left(\sum_{\boldsymbol{k} \in I_0(k,r,s)} \zeta^t(\boldsymbol{k}) \right) u^{k-r-s} v^{r-s} w^{s-1}$$

によって定義する. $\Phi_0 := \Phi_0^0, \Phi_0^\star := \Phi_0^1$ とする. また, Φ_1 を

$$\begin{aligned} \Phi_1(u,v,w) := \sum_{0<k,r,s} & \left(\sum_{\boldsymbol{k} \in I_0(k,r,s)} \sum_{i=1}^{r} \zeta(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots, k_r) \right) \\ & \cdot u^{k-r-s} v^{r-s} w^{s-1} \end{aligned}$$

によって定義する.

Ohno 関係式から, $\Phi_1(u,v,w) = \Phi_1(v,u,w)$ が成り立っていることが分かる. 前の項で示した定理は,

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = u + vt, \alpha\beta = t(uv - w) \\ &\gamma + \delta = -u + v(1-t), \gamma\delta = (t-1)(uv - w) \end{aligned}$$

としたとき,

$$\begin{aligned} &(1-t)\Phi_0^t(u,v,w) - t\Phi_0^{1-t}(-u,v,-w) \\ &= \frac{1}{uv - w} \left(1 - \frac{(1-\alpha-\gamma, 1-\alpha-\delta, 1-\beta-\gamma, 1-\beta-\delta)_\infty}{(1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma, 1-\delta, 1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)_\infty} \right) \end{aligned}$$

と書ける.

Definition 5.18. x を複素数とする. インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$\zeta_{\mathcal{K}}^{\vee,\star}(\boldsymbol{k};x) := \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_{k_r}} \frac{(x)_{n_r}}{n_r!}$$

によって定義する. また, 許容インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$\zeta^{\dagger}(\boldsymbol{k};x) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{n_r!}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}(x)_{n_r}}$$

と定義する.

$w=yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-2}$ としたとき, 正規化定理から従う等式

$$\zeta((w \,ш\, y^h)x) = \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r\\ 0<m_1\le\cdots\le m_h\le n_r}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \frac{1}{m_1\cdots m_h}$$

の母関数を考えることによって,

$$\zeta^{\dagger}(\boldsymbol{k};x) = \zeta(\boldsymbol{k}^{\dagger};x)$$

であることが分かる. ここで, 許容インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対して,

$$\zeta(\boldsymbol{k};x) := \sum_{0\le n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{(n_1+x)^{k_1}\cdots(n_r+x)^{k_r}}$$

と定義されるものとする. 複素数の x と混同しないようにこの項では Hoffman 代数を用いないことにする.

Theorem 5.19. $\alpha+\beta=u+v, \alpha\beta=w$ とする. $\mathbb{C}[[u,v,w,x]]$ における等式

$$\begin{aligned}
1 &+ u\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)} \zeta_{\mathcal{K}}^{\vee,\star}(k_1,\dots,k_{r-1},k_r-1;x)\right)(-u)^{k-r-s}v^{r-s}(-w)^{s-1}\\
&\quad + (w-uv)\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)} \zeta^{\dagger}(\boldsymbol{k};1-x)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\\
&= \frac{(1-\alpha,1-\beta,1-\alpha+u-x,1-\beta+u-x)_\infty}{(1-\alpha+u,1-\beta+u,1-u,1-x,1-v-x)_\infty}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. x が付いていない場合と全く同様の計算によって,

$$u\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta_{\mathcal{K}}^{\vee,\star}(k_1,\dots,k_{r-1},k_r-1;x)\right)(-u)^{k-r-s}v^{r-s}(-w)^{s-1}$$
$$=\sum_{0<n}\frac{(u,x)_n}{(1-\alpha+u,1-\beta+u)_n}$$
$$(w-uv)\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^{\dagger}(\boldsymbol{k};1-x)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}=\sum_{0<n}\frac{(\alpha-u,\beta-u)_n}{(1-u,1-x)_n}$$

であることが分かるから, Dougall の和公式より,

$$\begin{aligned}&1+u\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta_{\mathcal{K}}^{\vee,\star}(k_1,\dots,k_{r-1},k_r-1;x)\right)(-u)^{k-r-s}v^{r-s}(-w)^{s-1}\\&\qquad+(w-uv)\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^{\dagger}(\boldsymbol{k};1-x)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(u,x)_n}{(1-\alpha+u,1-\beta+u)_n}\\&=\frac{(1-\alpha,1-\beta,1-\alpha+u-x,1-\beta+u-x)_\infty}{(1-\alpha+u,1-\beta+u,1-u,1-x,1-v-x)_\infty}\end{aligned}$$

と示される. □

Proposition 5.20. $\mathbb{C}[[u,v,w,x]]$ において,

$$\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^{\dagger}(\boldsymbol{k};1-x)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}$$

の x の係数は,

$$\Phi_1(u,v,w)+\frac{d}{dv}\Phi_0(u,v,w)$$

で与えられる.

Proof. まず,

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^{\dagger}(\boldsymbol{k};1-x)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\\
&=\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta(\boldsymbol{k}^{\dagger};1-x)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\\
&=\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta(\boldsymbol{k};1-x)\right)v^{k-r-s}u^{r-s}w^{s-1}
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\sum_{i=1}^{r}k_i(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_r)\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\sum_{i=1}^{r}(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_r)\\
&\qquad+\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\sum_{i=1}^{r}(k_i-1)(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_r)\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\sum_{i=1}^{r}(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_r)\\
&\qquad+\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k+1,r,s)}\sum_{0<i\le r,2\le k_i}(k_i-2)\boldsymbol{k}\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\sum_{i=1}^{r}(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_r)+(k-r-s+1)\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k+1,r,s)}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

となることから,

$$\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^{\dagger}(\boldsymbol{k};1-x)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}$$

の x の係数は,

$$\Phi_1(v,u,w)+\frac{d}{dv}\Phi_0(v,u,w)=\Phi_1(u,v,w)+\frac{d}{dv}\Phi_0(u,v,w)$$

となることが分かる. □

ディガンマ関数 ϕ を用いて,

$$\phi_0(1-u) := \gamma + \phi(1-u)$$

と定義する.

Proposition 5.21. $\alpha+\beta = u+v, \alpha\beta = w$ に対して,

$$\begin{aligned}
&u\Phi_0^\star(-u,v,-w)\\
&= (uv-w)\left(\Phi_1(u,v,w) + \frac{d}{dv}\Phi_0(u,v,w)\right)\\
&\quad + \frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}(\psi_0(1-\alpha+u)+\psi_0(1-\beta+u)-\psi_0(1-v))
\end{aligned}$$

Proof. 前二つの命題から,

$$\begin{aligned}
&1 + u\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)} \zeta_{\mathcal{K}}^{\vee,\star}(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r-1;x)\right)(-u)^{k-r-s}v^{r-s}(-w)^{s-1}\\
&\quad + (w-uv)\sum_{0<k,r,s}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)} \zeta^\dagger(\boldsymbol{k};1-x)\right)u^{k-r-s}v^{r-s}w^{s-1}\\
&= \frac{(1-\alpha,1-\beta,1-\alpha+u-x,1-\beta+u-x)_\infty}{(1-\alpha+u,1-\beta+u,1-u,1-x,1-v-x)_\infty}
\end{aligned}$$

の x の係数を比較すると,

$$\begin{aligned}
&u\Phi_0^\star(-u,v,w) + (w-uv)\left(\Phi_1(u,v,w)+\frac{d}{dv}\Phi_0(u,v,w)\right)\\
&\quad = \frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}(\psi_0(1-\alpha+u)+\psi_0(1-\beta+u)-\psi_0(1-v))
\end{aligned}$$

と示される. □

Theorem 5.22 (Li の双対定理; Li [L2, Theorem 2.2])**.** $\alpha+\beta=u+v, \alpha\beta=w$ としたとき, $\mathbb{C}[[u,v,w]]$ における等式

$$\begin{aligned}
&u\Phi_0^\star(-u,v,-w) - v\Phi_0^\star(-v,u,-w)\\
&= \frac{v-u}{uv-w} - \frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}(\pi\cot\pi(u-\alpha)+\pi\cot\pi(u-\beta))
\end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. 前の命題から,

$$\begin{aligned}
&u\Phi_0^\star(-u,v,-w) - v\Phi_0^\star(-v,u,-w)\\
&= (uv-w)\left(\frac{d}{dv}-\frac{d}{du}\right)\Phi_0(u,v,w)\\
&\quad + \frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}(\psi_0(1-\alpha+u)+\psi_0(1-\beta+u)-\psi_0(1-v)\\
&\qquad\qquad -\psi_0(1-\alpha+v)-\psi_0(1-\beta+v)+\psi_0(1-u))
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{du}\Phi_0(u,v,w)\\
&= -\frac{v}{(uv-w)^2}\left(1-\frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}\right)\\
&\quad -\frac{1}{uv-w}\frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}\left(\psi_0(1-\alpha)\frac{d\alpha}{du}+\psi_0(1-\beta)\frac{d\beta}{du}-\psi_0(1-u)\right)
\end{aligned}$$

であり,

$$\frac{d\alpha}{du}=\frac{d\alpha}{dv},\quad \frac{d\beta}{du}=\frac{d\beta}{dv}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
(uv-w)\left(\frac{d}{dv}-\frac{d}{du}\right)\Phi_0(u,v,w) &= \frac{v-u}{uv-w}\left(1-\frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}\right)\\
&\quad + \frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}(\psi_0(1-v)-\psi_0(1-u))
\end{aligned}$$

となることが分かる. また, ディガンマ関数の相反公式より,

$$\begin{aligned}
&\psi_0(1-\alpha+u)+\psi_0(1-\beta+u)-\psi_0(1-\alpha+v)-\psi_0(1-\beta+v)\\
&= \frac{1}{u-\alpha}+\frac{1}{u-\beta}-\pi\cot\pi(u-\alpha)-\pi\cot\pi(u-\beta)\\
&= \frac{v-u}{uv-w}-\pi\cot\pi(u-\alpha)-\pi\cot\pi(u-\beta)
\end{aligned}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&u\Phi_0^\star(-u,v,-w)-v\Phi_0^\star(-v,u,-w)\\
&=(uv-w)\left(\frac{d}{dv}-\frac{d}{du}\right)\Phi_0(u,v,w)\\
&\qquad+\frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}(\psi_0(1-\alpha+u)+\psi_0(1-\beta+u)-\psi_0(1-v)\\
&\qquad\qquad\qquad-\psi_0(1-\alpha+v)-\psi_0(1-\beta+v)+\psi_0(1-u))\\
&=\frac{v-u}{uv-w}-\frac{(1-\alpha,1-\beta)_\infty}{(1-u,1-v)_\infty}(\pi\cot\pi(u-\alpha)+\pi\cot\pi(u-\beta))
\end{aligned}
$$

となって示される. □

$$X_0^\star(k,r,s):=\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r,s)}\zeta^\star(\boldsymbol{k})$$

とすると, 上の定理は

$$(-1)^mX_0^\star(n+m+1,n+1,s)-(-1)^nX_0^\star(n+m+1,m+1,s)$$

が Riemann ゼータ値で表せることを示している. $s=1$ として以下を得る.

Corollary 5.23 (Kaneko-Ohno [KO, Theorem 1])**.** 正整数 n,m に対し,

$$(-1)^n\zeta^\star(\{1\}^m,n+1)-(-1)^m\zeta^\star(\{1\}^n,m+1)$$

は Riemann ゼータ値で表される.

5.4 t-Kaneko-Sakata 型和公式

Theorem 5.24 (t-Kaneko-Sakata 型和公式; Li [L2, Theorem 3.11])**.** 正整数 a,b に対して,

$$\zeta^t(\{1\}^{a-1},b+1)=\sum_{0<r}(-1)^{r-1}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,r)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,r)}}\frac{1-t^{a_1}}{1-t}\zeta(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})$$

Proof. 同型写像 Δ とすると, $\mathfrak{H}^1[[u,v,w]]$ において,

$$\Delta\left(y\frac{x}{1-xw}\frac{1}{1-x(u+v)+(y+x)xuv}\right)=\frac{y}{1-yv-xw}\frac{x}{1-xu}$$

が成り立つので, 導分関係式より,

$$\zeta\left(\frac{y}{1-(y+xt)v}\frac{x}{1-xu}\right)=\zeta\left(y\frac{x}{1-xvt}\frac{1}{1-x(u+v)+(y+x)xuv}\right)$$

これより, u^bv^a の係数を比較すると,

$$\begin{aligned}\zeta^t(\{1\}^{a-1},b+1)&=\sum_{0<r}(-1)^{r-1}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,r)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,r)\\ 0\le h<a_1}}t^h\zeta(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})\\&=\sum_{0<r}(-1)^{r-1}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,r)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,r)}}\frac{1-t^{a_1}}{1-t}\zeta(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

を得る. □

$t\mapsto 1$ とすることによって, 以下を得る.

Corollary 5.25. 正整数 a,b に対して,

$$\zeta^\star(\{1\}^{a-1},b+1)=\sum_{0<r}(-1)^{r-1}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\in I(a,r)\\ \boldsymbol{b}\in I(b,r)}}a_1\zeta(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})$$

これらの等式によって, 高さ 1 の補間多重ゼータ値が高さ最大の多重ゼータ値によって明示的に表されることが分かったが, より一般的な Murahara-Sakata の和公式を補間多重ゼータ値に一般化できるかどうかはまだ分かっていないと思われる.

6 交代巡回和公式と双対巡回和公式

この節における巡回和公式の類似は, 筆者の独自研究である.

6.1 交代巡回和公式

この節では t 巡回和公式の節で定義した線形写像 α_0,α_1 を用いるものとする.

Definition 6.1. 線形写像 $\widetilde{c}$ を

$$\widetilde{c}(wx)=-xw,\quad \widetilde{c}(wy)=(x+y)w$$

によって定義する. 単項式 w に対し, 線形写像 $\widetilde{C}$ を

$$\widetilde{C}(w):=\sum_{i=0}^{2\mathrm{wt}(w)}\widetilde{c}^i(w)$$

とする.

Theorem 6.2 (交代巡回和公式)**.** $\mathrm{wt}(w) \neq \mathrm{dep}(w)$ であるような単項式 $w \in \mathfrak{H}$ に対して,

$$\zeta(y\alpha_0(\widetilde{C}(w))x) = 0$$

Proof. $\widetilde{Z}$ をインデックス $\boldsymbol{k} := (k_1, \ldots, k_r)$ に対して,

$$\widetilde{Z}(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}\cdots yx^{k_r-1}) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_1}} \frac{n_1}{n_1+n_r}$$

と定義すると, これは 1 だけからなるインデックスを除いて収束し, 部分分数分解によって,

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}(wx) &= -\widetilde{Z}(xw) + \zeta(ywx) \\ \widetilde{Z}(wy) &= \widetilde{Z}((x+y)w) \end{aligned}$$

であることが分かる. これらはまとめて,

$$\widetilde{Z}(w) = \widetilde{Z}(\widetilde{c}(w)) + \zeta(y\alpha_0(w)x)$$

と書くことができるので, これを $\widetilde{c}^i(w)$ に対して足し合わせることによって

$$\zeta(y\alpha_0(\widetilde{C}(w))x) = 0$$

が示される. □

Definition 6.3. 線形写像 $\overline{c}$ を

$$\overline{c}(wx) = -xw, \quad \overline{c}(wy) = (x+y)w$$

によって定義する. 単項式 w に対し, 線形写像 $\overline{C}$ を

$$\overline{C}(w) := \sum_{i=0}^{2\mathrm{wt}(w)} \overline{c}^i(w)$$

と定義する.

$$\widetilde{c}(w(2y+x)) = \widetilde{c}((2y+x)w), \quad \widetilde{c}(wx) = \widetilde{c}(xw)$$

から, $S_1^\sharp(w) := 2^{\mathrm{dep}(w)} S_1^{\frac{1}{2}}(w)$ を用いて,

$$(S_1^\sharp)^{-1}\alpha_0\widetilde{C}S_1^\sharp = (\alpha_0+\alpha_1)\overline{C}$$

が成り立つ.

前の定理を $\zeta^\sharp$ で書き表すことによって以下が得られる.

Corollary 6.4. $\mathrm{wt}(w) \neq \mathrm{dep}(w)$ であるような単項式 $w \in \mathfrak{H}$ に対して,

$$\zeta^\sharp(y(\alpha_0+\alpha_1)(\overline{C}(w))x) = 0$$

が成り立つ.

具体例を計算してみる. $w = yx^{2k-2}$ とすると,

$$\sum_{i=1}^{2k-2} (-1)^{i-1}\zeta^\sharp(i, 2k-i) + \zeta^\sharp(2k) = 0$$

となる. これを ζ で表すと,

$$\sum_{i=1}^{2k-2} (-1)^{i}\zeta(i, 2k-i) = \frac{1}{2}\zeta(2k)$$

が得られる. 交代巡回和公式は w を選んだとき, 深さ $\mathrm{dep}(w)+1$ 以下の元からなる関係式であるから, 正規化複シャッフル関係式から示せそうな感じもするが, 実際に含まれているかどうかはまだ分かっていない.

6.2 双対巡回和公式

Definition 6.5. 線形写像 $c^\dagger$ を

$$c^\dagger(wx) = yw, \quad c^\dagger(wy) = xw$$

によって定義する. 単項式 w に対し, 線形写像 $C^\dagger$ を

$$C^\dagger(w) := \sum_{i=0}^{2\mathrm{wt}(w)} (c^\dagger)^i(w)$$

とする.

Proposition 6.6. 正整数 k に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^{k-1} \zeta^\star(\{1\}^i, k-i+1) = 2k(1-2^{-k})\zeta(k+1)$$

Proof. Dixon の恒等式

$$\sum_{0\le n}\frac{(a,b,c)_n}{n!(1+a-b,1+a-c)_n}=\frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)\Gamma(1+a-b-c)}$$

の c の係数を比較して,

$$a\sum_{0<n}\frac{(b)_n}{n(n+a)(1+a-b)_n}=\psi_0(1+a-b)+\psi_0\left(1+\frac{a}{2}\right)-\psi_0(1+a)-\psi_0\left(1+\frac{a}{2}-b\right)$$

さらに b の係数を比較して, $a\mapsto -x$ とすると,

$$x\sum_{0<n}\frac{n!}{n^2(n-x)(1-x)_n}=\sum_{0<n}\left(\frac{1}{(n-x)^2}-\frac{1}{\left(n-\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$

この x^{k-1} の係数を比較して,

$$\sum_{i=0}^{k-2}\zeta^\star(\{1\}^i,k-i+1)=k(1-2^{1-k})\zeta(k+1)$$

両辺に

$$\zeta^\star(\{1\}^{k-1},2)=k\zeta(k+1)$$

を足して示される. □

Proposition 6.7. 以下の等式が成り立つ.

$$C^\dagger=S_1^{-1}\circ\tau\circ\widetilde{C}\circ\tau\circ S_1$$

Proof. まず, 直接計算によって

$$c^\dagger=S_1^{-1}\circ\tau\circ\widetilde{c}^{-1}\circ\tau\circ S_1$$

であることが分かる. よってこれを i 回合成したものを $i=0$ から $i=2\mathrm{wt}(w)-1$ まで足し合わせればよい. □

Theorem 6.8 (双対巡回和公式)**.** モニックな単項式 $w\in\mathfrak{H}$ に対して, $k=\mathrm{wt}(w)$ として,

$$\zeta^\star(y\alpha_0(C^\dagger(w))x)=2k(1-2^{-k})\zeta(k+1)$$

が成り立つ.

Proof. 前二つの命題と交代巡回和公式により,

$$\begin{aligned}\zeta^\star(y\alpha_0(C^\dagger(w-x^k))x) &= \zeta^\star(y\alpha_0(S_1^{-1}\circ\tau\circ\widetilde{C}\circ\tau\circ S_1)(w-x^k)x)\\ &= \zeta(y\alpha_0(\tau\circ\widetilde{C}\circ\tau\circ S_1)(w-x^k)x)\\ &= \zeta(y\alpha_0(\widetilde{C}\circ\tau\circ S_1)(w-x^k)x)\\ &= 0\end{aligned}$$

と,

$$\zeta^\star(y\alpha_0(C^\dagger(x^k))x) = 2k(1-2^{-k})\zeta(k+1)$$

が分かることから, 定理が示される. □

具体例を計算してみる. まず, $w = x(yx)^{k-1}$ とすると,

$$\zeta^\star(\{2\}^k) = 2(1-2^{1-2k})\zeta(2k)$$

が得られる. また, $w = x^2(y^2x^2)^k$ とすると,

$$\zeta^\star(3,\{1,3\}^k) + \zeta^\star(\{1,3\}^k,1,2) = 4(1-2^{-4k-2})\zeta(4k+3)$$

が得られる. 同様に $w = x^h(y^hx^h)^k$ を用いることで, h 個の多重ゼータスター値の和が Riemann ゼータ値の有理数倍となるような公式を得ることができる.

6.3 Aoki-Ohno の関係式

双対巡回和公式は高さが一定であることから, それを足し合わせることによって以下が得られる. これは巡回和公式を足し合わせて和公式が得られることの類似である.

Theorem 6.9 (Aoki-Ohno の関係式; Aoki-Ohno [AO, Theorem 1])**.** 正整数 k, s に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,*,s)} \zeta^\star(\boldsymbol{k}) = 2(1-2^{1-k})\binom{k-1}{2s-1}\zeta(k)$$

が成り立つ. ただし $I_0(k,*,s)$ は重さ k, 高さ s のインデックス全体の集合を表すとする.

Proof. $yw \sim yc^\dagger(w)$ による同値類の 1 つを α とすると, その重さを k として双対巡回和公式を

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\alpha\\ 2\le k_r}} \zeta^\star(\boldsymbol{k}) = |\alpha|(1-2^{1-k})\zeta(k)$$

と書くことができる. よって, 左辺が全ての重さ k, 高さ s のインデックス全体を渡るように足し合わせると, 右辺の $(1-2^{1-k})\zeta(k)$ の係数は

$$\begin{aligned}
&y^{e_1+1}x^{f_1+1}\cdots y^{e_s+1}x^{f_s+1}, y^{e_1+2}x^{f_1+1}\cdots x^{f_{s-1}+1}y^{e_s+1}\\
&yx^{f_0+1}y^{e_1+1}x^{f_1+1}\cdots x^{f_{s-1}+1}y^{e_s+1} \quad 0 \le e_i, f_i
\end{aligned}$$

で重さが k であるものの個数に等しい. それは,

$$\binom{k-1}{2s-1}+\binom{k-2}{2s-2}+\binom{k-2}{2s-1}=2\binom{k-1}{2s-1}$$

となることから定理が示される. □

Aoki-Ohno の関係式が正規化複シャッフル関係式に含まれているかどうかはまだ分かっていないと思われる.

7 重み付き和公式

7.1 2-1 公式

Proposition 7.1. 正整数 $m \le n$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{m}}{m^2\binom{n+m}{m}} &= \sum_{m\le a\le n}\frac{1}{a^2}\frac{\binom{a}{m}}{\binom{a+m}{m}}\\
m\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n+m}{m}}+2\sum_{m<a\le n}a\frac{\binom{n}{a}}{\binom{n+a}{a}} &= n\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n+m}{m}}\\
\frac{1}{m}\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n+m}{m}}+2\sum_{m<a\le n}\frac{1}{a}\frac{\binom{n}{a}}{\binom{n+a}{a}} &= \sum_{m\le a\le n}\frac{1}{a}\frac{\binom{a}{m}}{\binom{a+m}{m}}\\
2\sum_{0<a\le n}\frac{1}{a}\frac{\binom{n}{a}}{\binom{n+a}{a}} &= \sum_{0<a\le n}\frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Proof. 1 つ目の式は

$$\sum_{m\le a\le n}\frac{1}{a^2}\frac{\binom{a}{m}}{\binom{a+m}{m}}=\frac{1}{m^2}\sum_{m\le a\le n}\left(\frac{\binom{a}{m}}{\binom{a+m}{m}}-\frac{\binom{a-1}{n}}{\binom{a+m-1}{m}}\right)=\frac{\binom{n}{m}}{m^2\binom{n+m}{m}}$$

と示される. 2 つ目の式は,

$$2\sum_{m<a\le n}a\frac{\binom{n}{a}}{\binom{n+a}{a}}=n\sum_{m<a\le n}\left(\frac{\binom{n-1}{a-1}}{\binom{n+a-1}{a-1}}-\frac{\binom{n-1}{a}}{\binom{n+a}{a}}\right)=n\frac{\binom{n-1}{m}}{\binom{n+m}{m}}=\frac{(n-m)\binom{n}{m}}{\binom{n+m}{m}}$$

より示される. 3 つ目の式は 1 つ目と 2 つ目の式を用いて,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\frac{\binom{m}{n}}{\binom{n+m}{m}} + 2\sum_{m<a\le n}\frac{1}{a}\frac{\binom{n}{a}}{\binom{n+a}{a}} \\
&= \sum_{m\le b\le n}\frac{1}{b^2}m\frac{\binom{b}{m}}{\binom{b+m}{m}} + 2\sum_{m\le a\le b\le n}\frac{1}{b^2}a\frac{\binom{b}{a}}{\binom{b+a}{a}} \\
&= \sum_{m\le b\le n}\frac{1}{b}\frac{\binom{b}{m}}{\binom{b+m}{m}}
\end{aligned}
$$

と示される. 4 つ目の式は 3 つ目の式に $m=1$ を代入して両辺に $\frac{n}{n+1}$ を足せばよい. $\square$

集合 A の要素数を $\sharp A$ と表すことにすると, インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して,

$$
\zeta^{\sharp}(\boldsymbol{k}) = \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r}\frac{2^{\sharp\{n_1,\ldots,n_r\}}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}
$$

と表すことができる.

Theorem 7.2 (2-1 公式; Zhao [Z, Theorem 6.1])**.** $0\le k_1,\ldots,k_{r-1}, 0<k_r$ に対して,

$$
\zeta^{\sharp}(2k_1+1,\ldots,2k_r+1) = \zeta^{\star}(1,\{2\}^{k_1},\ldots,1,\{2\}^{k_r})
$$

が成り立つ.

Proof. 空でないインデックス $\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
Z_N(k_1,\ldots,k_r;\varnothing) &:= \sum_{0<m_1\le\cdots\le m_r\le N}\frac{2^{\sharp\{m_1,\ldots,m_r\}}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\frac{\binom{N}{m_r}}{\binom{N+m_r}{m_r}} \\
Z_N(k_1,\ldots,k_r;l_1,\ldots,l_s) &:= \sum_{0<m_1\le\cdots\le m_r\le n_1\le\cdots\le n_s\le N}\frac{2^{\sharp\{m_1,\ldots,m_r\}}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\frac{\binom{n_1}{m_r}}{\binom{n_1+m_r}{m_r}}\frac{1}{n_1^{l_1}\cdots n_s^{l_s}}
\end{aligned}
$$

とすると, 前の命題より,

$$
\begin{aligned}
Z_N(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+2;l_1,\ldots,l_s) &= Z_N(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r;2,l_1,\ldots,l_s) \\
Z_N(k_1,\ldots,k_r,1;l_1,\ldots,l_s) &= Z_N(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r;1,l_1,\ldots,l_s) \\
Z_N(1;l_1,\ldots,l_s) &= \zeta^{\star}_{\le N}(1,l_1,\ldots,l_s)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって,

$$
Z_N(k_1,\ldots,k_r,2h+1;l_1,\ldots,l_s) = Z_N(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r;1,\{2\}^h,l_1,\ldots,l_s)
$$

であることが分かるから,

$$
\begin{aligned}
Z_N(2k_1+1,\dots,2k_r+1;\varnothing) &= Z_N(2k_1+1,\dots,2k_{r-1}+1;1,\{2\}^{k_r}) \\
&= Z_N(2k_1+1,\dots,2k_{r-2}+1;1,\{2\}^{k_{r-1}},1,\{2\}^{k_r}) \\
&= \cdots \\
&= Z_N(2k_1+1;1,\{2\}^{k_2},\dots,1,\{2\}^{k_r}) \\
&= \zeta^\star_{\le N}(1,\{2\}^{k_1},\dots,1,\{2\}^{k_r})
\end{aligned}
$$

が得られる. $N \to \infty$ として定理が得られる. □

具体例を挙げると, 深さ 2 の場合,

$$\zeta^\sharp(2k_1+1,2k_2+1) = \zeta^\star(1,\{2\}^{k_1},1,\{2\}^{k_2})$$

となる.

2-1 公式は, 交代多重ゼータ値を用いることによって, 多重ゼータスター値の方を一般のインデックスに拡張できることが Zhao [Z] において示されている.

7.2 Eie-Liaw-Ong の重み付き和公式

Definition 7.3. 正整数 h とインデックス $\boldsymbol{k}$ に対して,

$$O_h(\boldsymbol{k}) := \sum_{\substack{0\le e_1,\dots,e_r \\ |\boldsymbol{e}|=h}} \zeta(\boldsymbol{k}\oplus\boldsymbol{e})$$

と定義する.

Ohno 関係式より, $O_h(\boldsymbol{k}) = O_h(\boldsymbol{k}^\dagger)$ が成り立つことが分かる.

Proposition 7.4. 正整数 k, r に対して,

$$2\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} (2^{k_i}-1)\zeta(k_1,\dots,k_{r-1},k_r+1) = \zeta^\sharp(r-i+1,\{1\}^{k-r-1},i+1)$$

が成り立つ.

Proof. Ohno 関係式を用いることによって,

$$\begin{aligned}\zeta^\sharp(r-i+1,\{1\}^{k-r-1},i+1) &= \sum_{j=0}^{k-r} 2^{j+1} O_{k-r-j}(r-i+1,\{1\}^{j-1},2i+1)\\ &= 2\sum_{j=0}^{k-r} 2^j O_{k-r-j}(\{1\}^{i-1},j+1,\{1\}^{r-i-1},2)\\ &= 2\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in I(k,r)\\ 0\le j<k_i}} 2^j\zeta(k_1,\dots,k_{r-1},k_r+1)\\ &= 2\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)}(2^{k_i}-1)\zeta(k_1,\dots,k_{r-1},k_r+1)\end{aligned}$$

と計算できる. ただし上の計算の $j=0$ のとき, $(a,\{1\}^{j-1},b)$ は $(a+b-1)$ と見なすものとする. □

Theorem 7.5 (Eie-Liaw-Ong の重み付き和公式; Eie-Liaw-Ong [ELO, Main Theorem]). 正整数 k,r に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)}(2^{k_2}+2^{k_4}+\cdots+2^{k_{2r}})\zeta(k_1,\dots,k_{2r-1},k_{2r}+1)=\frac{k+2r}{2}\zeta(k+1)$$

が成り立つ.

Proof. 一つ前の命題と 2-1 公式を用いて,

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{r}\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,2r)}(2^{k_{2i}}-1)\zeta(k_1,\dots,k_{2r-1},k_{2r}+1) &= \zeta^\sharp(2r-2i+1,\{1\}^{k-2r-1},2i+1)\\ &= \sum_{i=1}^{r}\zeta^\star(1,\{2\}^{r-i},\{1\}^{k-2r},\{2\}^i)\end{aligned}$$

が成り立つ. 一方巡回和公式より,

$$\sum_{i=1}^{r}\zeta^\star(1,\{2\}^{r-i},\{1\}^{k-2r},\{2\}^i)=k\zeta(k+1)$$

であるから,

$$2\sum_{i=1}^{r}\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,2r)}(2^{k_{2i}}-1)\zeta(k_1,\dots,k_{2r-1},k_{2r}+1)=k\zeta(k+1)$$

両辺を 2 で割って和公式を用いることによって, 定理を得る. □

これは Ohno-Zudilin の重み付き和公式の一般化になっている.

7.3 Kawamura-Maesaka-Ono の重み付き和公式

Theorem 7.6 (Kawamura-Maesaka-Ono の重み付き和公式; Kawamura-Maesaka-Ono [KMO, Theorem 1.1])**.** 正整数 k, r に対して,

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)} (2^{k_r-1}-1)\zeta^{\sharp}(\boldsymbol{k}) = 2(2^{k-1}-1)\zeta(k)$$

が成り立つ.

Proof. Dixon の恒等式

$$\sum_{0\le n}\frac{(a,b,c)_n}{n!(1+a-b,1+a-c)_n} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)\Gamma(1+a-b-c)}$$

の c の係数を比較して,

$$a\sum_{0<n}\frac{(b)_n}{n(n+a)(1+a-b)_n} = \psi_0(1+a-b)+\psi_0\left(1+\frac{a}{2}\right)-\psi_0(1+a)-\psi_0\left(1+\frac{a}{2}-b\right)$$

を得る. $a\mapsto -2u, b\mapsto v-u$ として, 得られる

$$\begin{aligned}&\sum_{0<n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2u}\right)\frac{(1-u+v)_{n-1}}{(1-u-v)_n}\\ &=\frac{1}{v-u}(\psi_0(1-u-v)+\psi_0(1-u)-\psi_0(1-2u)-\psi_0(1-v))\end{aligned}$$

を和公式から得られる

$$\sum_{0<n}\frac{(1-u-v)_{n-1}}{n(1-u+v)_n} = \frac{1}{v-u}(\psi_0(1-u-v)-\psi_0(1-2v))$$

から引いて,

$$\sum_{0<n}\frac{(1-u+v)_{n-1}}{(n-2u)(1-u-v)_n} = \frac{1}{v-u}(\psi_0(1-v)+\psi_0(1-2u)-\psi_0(1-u)-\psi_0(1-2v))$$

左辺は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<n} \frac{(1-u+v)_{n-1}}{(n-2u)(1-u-v)_n} \\
&= \sum_{0<r} v^{r-1} \sum_{0<n_1\leq\cdots\leq n_r} \frac{2^{\sharp\{n_1,\ldots,n_r\}-1}}{(n_1-u)\cdots(n_{r-1}-u)(n_r-u)(n_r-2u)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{0<k,r} v^{r-1}u^{k-r-1} \sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,r)} (2^{k_r-1}-1)\zeta^\sharp(\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

と展開できる. 一方, 右辺は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{v-u}(\psi_0(1-v)+\psi_0(1-2u)-\psi_0(1-u)-\psi_0(1-2v)) \\
&= \frac{1}{v-u}\sum_{0<k}(2^{k-1}-1)\zeta(k)(v^{k-1}-u^{k-1}) \\
&= \sum_{0<r<k} v^{r-1}u^{k-r-1}(2^{k-1}-1)\zeta(k)
\end{aligned}
$$

となることから定理が示される. □

これも Ohno-Zudilin の重み付き和公式の一般化になっていることが分かる.

参考文献

[AO] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions, Publ. RIMS Kyoto Univ. 41 (2005), 329–337.

[D] J. Dougall, On Vandermonde' s theorem and some more general expansions, Proc. Edinburgh Math. Soc. 25 (1907) 114–132.

[ELO] M. Eie, W-C. Liaw and Y. L. Ong, On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values, Int. J. Number Theory 9 (2013), 1185–1198.

[H] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, Pacific J. Math. 152 (1992), 275-290.

[HIMS] M. Hirose, K. Imatomi, H. Murahara and S. Saito, Ohno-type relations for classical and finite multiple zeta values, preprint, arXiv:1806.09299.

[HMO] M. Hirose, H. Murahara and M. Ono, Ohno-type relation for interpolated multiple zeta values, preprint, arXiv:2103.14851.

[HO] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, 262 (2003)

[KMO] H. Kawamura, T. Maesaka, M. Ono, Weighted sum formula for variants of half multiple zeta values, preprint, arXiv:2303.15644

[KO] M. Kaneko and Y. Ohno, On a kind of duality of multiple zeta-star values, Int. J. Number Theory 6(8)(2010), 1927-1932.

[L] Z. Li, Algebraic relations of interpolated multiple zeta values, preprint, arXiv:1904.09887.

[L2] Z. Li, On a conjecture of Kaneko and Ohno, Pacific J. Math. 257 (2012), 419–430.

[LQ1] Z. Li and C. Qin, Some relations of interpolated multiple zeta values, Internat. J. Math. 28 (2017), art. 175033 (25 pp).

[LQ2] Z. Li and C. Qin, Some relations deduced from regularized double shuffle relations of multiple zeta values, Int. J. Number Theory 17 (2021), 91–146

[M] S. Muneta, Algebraic setup of non-strict multiple zeta values, Acta Arithmetica 136 (2009), 7–18.

[O] Y. Ohno A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, Vol. 74 (1999)

[OZ] Y. Ohno and W. Zudilin, Zeta stars, Commun. Number Theory Phys. 2 (2008), 325-347.

[W] N. Wakabayashi, Double shuffle and Hoffman' s relations for interpolated multiple zeta values, Int. J. Number Theory 13 (2017), 2245–2251.

[Y] S. Yamamoto, Interpolation of multiple zeta and zeta-star values, J. Algebra 385 (2013), 102–114.

[Z] Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta star values, J. Math. Soc. Japan 68 (2016), 1669–1694.