

多重ポリログ

nkswtr

目次

1	1 変数多重ポリログ	2
1.1	Landen 型接続公式	2
1.2	反復積分の合成公式	3
1.3	$z = 1$ における接続公式	3
2	多変数多重ポリログの導入	4
2.1	多重ポリログ	4
3	双対性	5
3.1	反復積分表示	5
3.2	双対性	6
3.3	Sakugawa-Seki の恒等式	7
4	複シャッフル関係式	8
4.1	シャッフル関係式	8
4.2	調和関係式	8
4.3	正規化複シャッフル関係式	9
5	導分関係式と Ohno 関係式	11
5.1	導分関係式	11
5.2	Ohno 関係式	14
6	巡回和公式	15
6.1	巡回和公式	15

6.2	交代巡回和公式	17
6.3	双対巡回和公式	18

1 1変数多重ポリログ

1.1 Landen 型接続公式

Definition 1.1. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$ と $|z| < 1$ に対して,

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}$$

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^*(z) := \sum_{0 < n_1 \leq \dots \leq n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}$$

と定義する.

x, y に対応する微分形式をそれぞれ $\frac{dt}{t}, \frac{dt}{1-t}$ として, $[0, z]$ における反復積分を I_z と書くことにすると, Li, Li^* はそれぞれ反復積分表示

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(z) = I_z(yx^{k_1-1}yx^{k_2-1} \dots yx^{k_r-1})$$

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^*(z) = I_z(yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1} \dots (y+x)x^{k_r-1})$$

を持つ. これによって, $|z| < 1$ の外側へと解析接続できる.

Theorem 1.2 (Landen 型接続公式). 複素数 z に対して,

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^*(z) = -\text{Li}_{\mathbf{k}}^*\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Proof. 反復積分表示

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}^*(z) = I_z(yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1} \dots (y+x)x^{k_r-1})$$

において, 変数変換 $t \rightarrow \frac{t}{t-1}$ を行うと, $x \rightarrow x+y, y \rightarrow -y$ となって示される. □

Hoffman 代数を用いれば, これは同型写像 $\phi(x) = x+y, \phi(y) = -y$ を用いて,

$$\text{Li}_w(z) = \text{Li}_{\phi(w)}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

と表すこともできる.

1.2 反復積分の合成公式

Definition 1.3. $0 \leq a \leq b \leq 1$ に対して, $[a, b]$ における反復積分を $I(a; w; b)$ とする.

$w \in \mathfrak{H}$ に対して, $w_{i,j} \in \mathfrak{H}^0$ があって,

$$w = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m x^i \text{III} w_{i,j} \text{III} y^j$$

と書くことができる. よって, 正規化された反復積分の値が

$$I(a; x; b) = \ln b - \ln a, \quad I(a; y; b) = -\ln(1-b) + \ln(1-a)$$

とシャッフル積によって一意的に定まる. これによって多重ゼータ値を $w \in \mathfrak{H}$ の元に対して

$$\zeta^{\text{III}}(w) = I(w)$$

によって定義できる.

Theorem 1.4. $0 \leq a \leq b \leq 1$, 単項式 $w \in \mathfrak{H}$ と, $0 \leq c \leq 1$ に対して,

$$I(a; w; b) = \sum_{w_1 w_2 = w} I(a; w_1; c) I(c; w_2; b)$$

が成り立つ.

1.3 $z = 1$ における接続公式

Theorem 1.5. 反自己同型 τ を $\tau(x) = y, \tau(y) = x$ とする. 単項式 $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\sum_{w_1 w_2 = w} I_z(w_1) I_{1-z}(\tau(w_2)) = \zeta(w)$$

が成り立つ.

Proof. 合成公式より,

$$\zeta(w) = I(0; w; 1) = \sum_{w_1 w_2 = w} I(0; w_1; z) I(z; w_2; 1) = \sum_{w_1 w_2 = w} I_z(w_1) I_{1-z}(\tau(w_2))$$

□

例えば $w = yx$ とすると,

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(1-z) + \ln z \ln(1-z) = \zeta(2)$$

が得られる.

Theorem 1.6. 単項式 $w \in \mathfrak{H}$ に対して,

$$I_{1-z}(w) = \sum_{w_1 w_2 = \tau(w)} (-1)^{\text{wt}(w_1)} I_z(\overleftarrow{w_1}) \zeta^{\text{III}}(w_2)$$

が成り立つ. ここで, $\overleftarrow{u_1 \cdots u_r} = u_r \cdots u_1, u_i \in \{x, y\}$ とする.

Proof.

$$\begin{aligned} I_{1-z}(w) &= I(0; w; 1-z) = I(z; \tau(w); 1) \\ &= \sum_{w_1 w_2 = \tau(w)} I(z; w_1; 0) I(0; w_2; 1) \\ &= \sum_{w_1 w_2 = \tau(w)} (-1)^{\text{wt}(w_1)} I_z(\overleftarrow{w_1}) \zeta^{\text{III}}(w_2) \end{aligned}$$

□

$w = yx$ とすると,

$$\text{Li}_2(1-z) = I_z(xy) + \zeta(2) = -\ln z \ln(1-z) - \text{Li}_2(z) + \zeta(2)$$

となって先ほどと同じ式が得られる. $w = y^2x$ とすると,

$$\text{Li}_{1,2}(1-z) = -I_z(x^2y) + \zeta(3) = \frac{1}{2} \ln^2 z \ln(1-z) + \ln z \text{Li}_2(z) - \text{Li}_3(z) + \zeta(3)$$

が得られる.

2 多変数多重ポリログの導入

2.1 多重ポリログ

前の節で扱った多重ポリログを多変数に拡張する.

Definition 2.1 (多重ポリログ). インデックス \mathbf{k} と複素数 $|z_1|, \dots, |z_r| < 1$ に対して, 多変数の多重ポリログを以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z_1, \dots, z_r) &:= \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2 - n_1} \dots z_r^{n_r - n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \\ \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}^*(z_1, \dots, z_r) &:= \sum_{0 < n_1 \leq \dots \leq n_r} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2 - n_1} \dots z_r^{n_r - n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \end{aligned}$$

インデックス \mathbf{k} の深さが 1 のときの

$$\text{Li}_k(z) = \sum_{0 < n} \frac{z^n}{n^k}$$

はポリログまたは多重対数関数と呼ばれている.

Definition 2.2. $0 \leq r, z_1, \dots, z_r \in \widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ による

$$e_{z_1} \cdots e_{z_r}$$

という形の元全体から \mathbb{C} 上生成される空間を \mathfrak{C} と定義する. ただし, 相異なる z_1, z_2 に対して積は非可換

$$e_{z_1} e_{z_2} \neq e_{z_2} e_{z_1}$$

であるとする.

$$e_{z_1} \cdots e_{z_r}, \quad z_1 \neq \infty$$

という形の元全体から \mathbb{C} 上生成される空間を \mathfrak{C}^1 と定義し, \mathfrak{C}^1 の中で, さらに $z_r \neq 1$ であるような元全体を \mathfrak{C}^0 とする.

これらは $x = -e_\infty, y = e_1$ とすることによって, Hoffman 代数 $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ の拡張となっている.

3 双対性

3.1 反復積分表示

e_z に対応する微分形式を $\frac{z dt}{1-zt}$ とすると, 反復積分表示

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z_1 z, \dots, z_r z) = I_z(e_{z_1} x^{k_1-1} \cdots e_{z_r} x^{k_r-1})$$

が成り立つことが分かる. ここで, 右辺の単項式は $x = -e_\infty$ と見なすことによって \mathfrak{C} の元となる. 特に $z = 1$ として,

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z_1, \dots, z_r) = I(e_{z_1} \cdots e_{z_r})$$

を得る. よって, この反復積分表示によって, $|z_i| < 1$ より十分広い範囲に解析接続できる. 以下, この解析接続ができるので, 範囲に関してはあまりこだわらずに $w \in \mathfrak{C}$ と書くことにする.

3.2 双対性

Theorem 3.1 (一般化された双対性). $\alpha \in \mathbb{C}$ とする. $w \in \mathfrak{C}$ に対して, 反自己同型 τ_α を $\tau_\alpha(e_z) = e_\alpha - e_{\frac{\alpha-z}{1-z}}$ で定める. このとき,

$$I(w) = I(\tau_\alpha(w))$$

が成り立つ.

Proof. 反復積分表示において, $t \rightarrow \frac{1-t}{1-\alpha t}$ とすればよい. □

$e_{\frac{\alpha-z}{1-z}}$ は $z = 1$ のときは, $e_\infty = -x$ となり, $z = \infty$ のときは $e_{\frac{\alpha-z}{1-z}} = e_1$ となる. よって $\tau_\alpha(x) = y - e_\alpha, \tau_\alpha(y) = x + e_\alpha$ となる. $\alpha = 0$ として以下を得る.

Corollary 3.2 (双対性; Borwein-Bradley-Broadhurst-Lisonek [BBBL]). $w \in \mathfrak{C}$ に対して, 反自己同型 τ を $\tau(e_z) = -e_{\frac{z}{z-1}}$ で定める. このとき,

$$I(w) = I(\tau(w))$$

が成り立つ.

これは多重ゼータ値の双対性,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}^\dagger)$$

の一般化である. $y = e_1$ として, 具体例を挙げると, $w = e_z x^{k-1}$ に対し,

$$I(e_z x^{k-1}) = -I(y^{k-1} e_{\frac{z}{z-1}})$$

が得られる. Li で書き直すと,

$$\text{Li}_k(z) = -\text{Li}_{\{1\}^k} \left(\{1\}^{k-1}, \frac{z}{z-1} \right)$$

となる.

また, $w = e_{z_1} \cdots e_{z_r}, z_i \in \mathbb{C}$ とすると,

$$\text{Li}_{\{1\}^r}(z_1, \dots, z_r) = (-1)^r \text{Li}_{\{1\}^r} \left(\frac{z_r}{z_r - 1}, \dots, \frac{z_1}{z_1 - 1} \right)$$

が得られる.

3.3 Sakugawa-Seki の恒等式

Proposition 3.3 (一般化された Landen 型接続公式). $w \in \mathfrak{C}$ に対して, 同型写像 ϕ を $\phi(e_z) = e_{1-z} - y$ によって定める. ただし $z = \infty$ のとき, $\phi(x) = x + y$ とする. このとき,

$$I_z(w) = I_{\frac{z}{z-1}}(\phi(w))$$

が成り立つ.

Proof. 反復積分表示において, $t \rightarrow \frac{t}{t-1}$ とすればよい. □

$w = e_{z_1} x^{k_1-1} \cdots e_{z_r} x^{k_r-1}$ に対して,

$$I_{\leq n}(w) := \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r \leq n} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2-n_1} \cdots z_r^{n_r-n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

$$H_{\leq n}(w) := \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r \leq n} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2-n_1} \cdots z_r^{n_r-n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} (-1)^{n_r} \binom{n}{n_r}$$

とすると,

$$\frac{1}{1-z} I_z(w) = \sum_{0 \leq n} I_{\leq n}(w) z^n$$

$$\frac{1}{1-z} I_{\frac{z}{z-1}}(w) = \sum_{0 \leq n} H_{\leq n}(w) z^n$$

が成り立つことが分かる. よって z^n の係数を比較して, 以下が従う.

Corollary 3.4 (Sakugawa-Seki の恒等式; Sakugawa-Seki [SS, Theorem 2.5]). 正整数 n と $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$I_{\leq n}(w) = H_{\leq n}(\phi(w))$$

が成り立つ.

$w = e_z$ としてみると,

$$\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(1-z)^k - 1}{k} (-1)^k \binom{n}{k}$$

が得られる.

4 複シャッフル関係式

4.1 シャッフル関係式

Definition 4.1 (シャッフル積). $w_1, w_2, w \in \mathfrak{C}, z_1, z_2 \in \widehat{\mathfrak{C}}$ に対して, $u_1 = e_{z_1}, u_2 = e_{z_2}$ として,

$$\begin{aligned} w \text{ III } 1_{\mathfrak{C}} &= 1_{\mathfrak{C}} \text{ III } w = w \\ w_1 u_1 \text{ III } w_2 u_2 &= (w_1 u_1 \text{ III } w_2) u_2 + (w_1 \text{ III } w_2 u_2) u_1 \end{aligned}$$

によって双線形に積 III を \mathfrak{C} に定義する.

反復積分表示からシャッフル関係式

$$I(w_1)I(w_2) = I(w_1 \text{ III } w_2)$$

が成り立つことが分かる.

4.2 調和関係式

Definition 4.2 (調和積). $w_1, w_2, w \in \mathfrak{C}, z_1, z_2 \in \widehat{\mathfrak{C}}$ に対して,

$$\begin{aligned} w * 1_{\mathfrak{C}} &= 1_{\mathfrak{C}} * w = w \\ x w_1 * w_2 &= w_1 * x w_2 = x(w_1 * w_2) \\ e_{z_1} w_1 * e_{z_2} w_2 &= e_{z_1 z_2} (e_{z_1} w_1 * w_2 + w_1 * e_{z_2} w_2 + x(w_1 * w_2)) \end{aligned}$$

によって双線形に積 $*$ を \mathfrak{C} に定義する.

Theorem 4.3 (調和関係式). $w_1, w_2 \in \mathfrak{C}^0$ に対して,

$$I(w_1)I(w_2) = I(w_1 * w_2)$$

が成り立つ.

Proof. 調和積の定義から,

$$e_{z_1} x^{k_1-1} w_1 * e_{z_2} x^{k_2-1} w_2 = e_{z_1 z_2} x^{k_1-1} (w_1 * e_{z_2} x^{k_2-1} w_2) + e_{z_1 z_2} x^{k_2-1} (e_{z_1} x^{k_1-1} w_1 * w_2) + e_{z_1 z_2} x^{k_1+k_2-1} (w_1 * w_2)$$

が分かる. よって級数表示

$$I_{n<}(e_{z_1} x^{k_1-1} \dots e_{z_r} x^{k_r-1}) = \sum_{n < n_1 < \dots < n_r} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2-n_1} \dots z_r^{n_r-n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}$$

で積を考えて, 不等号を左から分解することによって帰納的に調和関係式

$$I_{n<}(w_1) I_{n<}(w_2) = I_{n<}(w_1 * w_2)$$

が示されるので, $n = 0$ として定理を得る. □

4.3 正規化複シャッフル関係式

Definition 4.4 (シャッフル正規化多項式). 単項式 $w \in \mathfrak{C}$ は $w_{i,j} \in \mathfrak{C}^0$ を用いて

$$w = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m x^i \text{III} w_{i,j} \text{III} y^j$$

と一意的に書ける. これを用いて X, Y を変数とする正規化多項式 $I_{X,Y}(w)$ を

$$I_{X,Y}(w) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m I(w_{i,j}) X^i Y^j$$

によって定める.

定義より, $I_{X,Y}$ はシャッフル関係式 $I_{X,Y}(w_1) I_{X,Y}(w_2) = I_{X,Y}(w_1 \text{III} w_2)$ を満たすことが分かる.

Definition 4.5 (調和正規化多項式). シャッフル, 調和正規化多重ゼータ値をそれぞれ $\zeta^{\text{III}}(\mathbf{k}; Y), \zeta^*(\mathbf{k}; Y)$ で表すとき, 線形写像 ρ を

$$\rho(\zeta^*(\{1\}^n; Y)) := \zeta^{\text{III}}(\{1\}^n; Y)$$

で定める. これを用いて, 調和正規化多項式 $I_{X,Y}$ を

$$I_{X,Y}^*(w) := \rho^{-1}(I_{X,Y}(w))$$

によって定義する.

$I(w; Y) := I_{0,Y}(w), I^*(w; Y) := I_{0,Y}^*(w)$ とする. \mathfrak{C}^1 においては, $|z_i| \leq 1$ ならば多重ゼータ値の場合と同様に $< n$ で考えた和を $n \rightarrow \infty$ として漸近挙動を考えることによって, 調和正規化多項式 $I(w; Y)$ が得られる.

Proposition 4.6. $w = e_{z_1} \cdots e_{z_r} \in \mathfrak{C}^1, z_i \in \{|z| < 1; z \in \mathbb{C}\} \cup \{\infty\}$ とする. $N \rightarrow \infty$ においてある定数 $0 < m$ があって, 以下の漸近展開が成り立つ.

$$I_{<N}(w) = I^*(w; \zeta_{<N}(1)) + O\left(\frac{\zeta_{<N}(1)^m}{N}\right)$$

Proof. $w_i \in \mathfrak{C}^0$ を用いて

$$w = \sum_{i=0}^n w_i * y^i$$

と表せば, $I_{<N}$ が調和関係式を満たすことより従う. □

Theorem 4.7 (正規化調和関係式). $w_1, w_2 \in \mathfrak{C}^1$ とするとき,

$$\sum_{0 \leq h} s^h I_{X_1, Y}^*(x^h w_1) \sum_{0 \leq h} s^h I_{X_2, Y}^*(x^h w_2) = \sum_{0 \leq h} s^h I_{X_1 + X_2, Y}^*(x^h (w_1 * w_2))$$

が成り立つ.

Proof. まず,

$$\sum_{0 \leq h} s^h I_{X, Y}^*(x^h w) = e^{Xs} \sum_{0 \leq h} s^h I_{0, Y}^*(x^h w)$$

であるから, $X_1 = X_2 = 0$ の場合を考えれば良い. $w = e_{z_1} x^{k_1-1} \cdots e_{z_r} x^{k_r-1}$ として $< n$ で考えると,

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq h} (-s)^h I_{<n}(e_{z_1} (x^h \text{III} x^{k_1-1} e_{z_2} x^{k_2-1} \cdots e_{z_r} x^{k_r-1})) \\ &= \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r < n} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2 - n_1} \cdots z_r^{n_r - n_{r-1}}}{(n_1 + s)^{k_1} \cdots (n_r + s)^{k_r}} \end{aligned}$$

が調和関係式を満たすことから, $n \rightarrow \infty$ として定理を得る. □

特に定数項を考えると,

$$I^*(w_1; Y) I^*(w_2; Y) = I^*(w_1 * w_2; Y)$$

が得られることが分かる. よって多重ゼータ値の場合と全く同様に次が得られる.

Theorem 4.8 (正規化複シャッフル関係式). $w_0 \in \mathfrak{C}^0, w_1 \in \mathfrak{C}^1$ に対して,

$$\begin{aligned} I(w_0 \boxplus w_1; Y) &= I(w_0 * w_1; Y) \\ I^*(w_0 \boxplus w_1; Y) &= I^*(w_0 * w_1; Y) \end{aligned}$$

Proof. ρ を用いて多重ゼータ値の場合と全く同様に示される. □

5 導分関係式と Ohno 関係式

5.1 導分関係式

Definition 5.1. 写像 $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ は, $w_1, w_2 \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$f(w_1 w_2) = f(w_1) w_2 + w_1 f(w_2)$$

を満たすとき, 導分であるという.

Definition 5.2. $0 < n, w \in \mathfrak{C}^1$ に対して, d_n^{\boxplus}, d_n^* を恒等写像として,

$$\begin{aligned} d_n^{\boxplus}(w) &:= w \boxplus y^n - (w \boxplus y^{n-1})y \\ d_n^*(w) &:= w * y^n - (w * y^{n-1})y \end{aligned}$$

と定義する.

$w \in \mathfrak{C}^1, z \in \widehat{\mathfrak{C}}, u = e_z$ とすると,

$$d_n^{\boxplus}(wu) = (w \boxplus y^n)u$$

が成立する.

Proposition 5.3. $w \in \mathfrak{C}^1$ に対して,

$$\begin{aligned} w \boxplus y^n &= \sum_{k=0}^n d_k^{\boxplus}(w) y^{n-k} \\ w * y^n &= \sum_{k=0}^n d_k^*(w) y^{n-k} \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. $w \in \mathfrak{C}^1$ に対して,

$$\sum_{k=0}^n d_k^{\text{III}}(w)y^{n-k} = wy^n + \sum_{k=1}^n (w \text{ III } y^k - (w \text{ III } y^{k-1})y)y^{n-k} = w \text{ III } y^n$$

によって示される. * の方も全く同様である. □

Proposition 5.4. 写像 $\Phi^{\text{III}}, \Phi^*$ を

$$\begin{aligned}\Phi^{\text{III}} &:= \sum_{0 \leq n} t^n d_n^{\text{III}} \\ \Phi^* &:= \sum_{0 \leq n} t^n d_n^*\end{aligned}$$

と定めたとき, $\Phi^{\text{III}}, \Phi^*$ は $\mathfrak{C}^1[[t]]$ 上の同型写像であり, $z \in \widehat{\mathfrak{C}}$ に対して,

$$\begin{aligned}\Phi^{\text{III}}(e_z) &= \frac{1}{1-yt} e_z \\ \Phi^*(e_z) &= e_z \left(1 + \frac{t}{1-e_z t} (e_z + x) \right)\end{aligned}$$

と定めることによって $\mathfrak{C}[[t]]$ 上の同型写像に自然に拡張できる.

Proof. まず,

$$e_{z_1} \cdots e_{z_r} \text{ III } y^h = \sum_{0 \leq a_1, \dots, a_{r+1}} y^{a_1} e_{z_1} y^{a_2} e_{z_2} \cdots y^{a_r} e_{z_r} y^{a_{r+1}}$$

であることから Φ^{III} の方が従う. 次に, 帰納的に

$$e_{z_1} \cdots e_{z_r} * y^h = \sum_{0 \leq a_1, \dots, a_{r+1}} e_{z_1}^{a_1} (e_{z_1} + (1 - \delta_{a_1, 0})x) \cdots e_{z_r}^{a_r} (e_{z_r} + (1 - \delta_{a_r, 0})x) y^{a_{r+1}}$$

であることが分かるから, Φ^* の方が従う. □

Proposition 5.5. $w \in \mathfrak{C}^1$ に対して,

$$\begin{aligned}w \text{ III } \frac{1}{1-yt} &= \Phi^{\text{III}}(w) \frac{1}{1-yt} \\ w * \frac{1}{1-yt} &= \Phi^*(w) \frac{1}{1-yt}\end{aligned}$$

が成り立つ.

Corollary 5.6. $\Delta := (\Phi^{\text{III}})^{-1} \circ \Phi^*$ とするとき,

$$w * \frac{1}{1-yt} = \Delta(w) \text{III} \frac{1}{1-yt}$$

が成立する.

計算により, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して,

$$\Delta(e_z + x) = \frac{1}{1 + (y - e_z)t} (e_z + x)$$

が成り立つこと分かる.

Definition 5.7. 自然数 $0 < n$ と $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して, 導分 ∂_n を

$$\partial_n(e_z + x) = (y - e_z)(x + y)^{n-1}(e_z + x)$$

によって定める.

Proposition 5.8. 同型写像 ϕ を $\phi(x) = y + x, \phi(e_z) = e_{1-z} - y, z \in \mathbb{C}$ とすると, $w \in \mathfrak{C}^1$ に対し,

$$\partial_n(wx) = -\phi(\phi(w) * yx^{n-1})x$$

が成り立つ.

Proof. $\phi \circ \phi$ が恒等写像であるから, $w = e_{z_1} \cdots e_{z_r}, z_i \in \widehat{\mathbb{C}}$ として, $1 - \infty = \infty$ と見なすことにすると,

$$\begin{aligned} \partial_n(\phi(w)x) &= \partial_n((e_{1-z_1} - y) \cdots (e_{1-z_r} - y)x) \\ &= \sum_{i=1}^r (e_{1-z_1} - y) \cdots (e_{1-z_i} - y)(x + y)^{n-1}(e_{1-z_i} + x) \\ &\quad \cdot (e_{1-z_{i+1}} - y) \cdots (e_{1-z_r} - y)x \\ &\quad + (e_{1-z_1} - y) \cdots (e_{1-z_r} - y)y(y + x)^{n-1}x \\ &= -\phi(e_{z_1} \cdots e_{z_r} * yx^{n-1})x \\ &= -\phi(w * yx^{n-1})x \end{aligned}$$

であることから従う. □

Proposition 5.9. 同型写像の間の等式

$$\Delta = \exp \left(\sum_{0 < n} \frac{\partial_n}{n} (-t)^n \right)$$

が成立する.

Proof. まず, 1 つ前の命題より,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{0 < n} \frac{\partial_n}{n} (-t)^n\right)(wx) &= \phi\left(\phi(w) * \exp_*\left(\sum_{0 < n} \frac{(-1)^{n-1} z_n t^n}{n}\right)\right) x \\
&= \phi\left(\phi(w) * \frac{1}{1-yt}\right) x \\
&= \phi\left(\Phi^*(\phi(w)) \frac{1}{1-yt}\right) x \\
&= \phi(\Phi^*(\phi(wx)))
\end{aligned}$$

であり, $\Delta = \phi \circ \Phi^* \circ \phi$ が成り立つことから示される. □

Theorem 5.10 (導分関係式). $w \in \mathfrak{C}^0$ に対して, 以下が成り立つ.

- (i) $I(w) = I(\Delta(w))$
- (ii) 自然数 $0 < n$ と $w \in \mathfrak{C}^0$ に対して,

$$I(\partial_n(w)) = 0$$

が成り立つ.

Proof. (i) は正規化複シャッフル関係式より, $w \in \mathfrak{C}^0$ に対して,

$$I(w) = I\left(w \text{ III } \frac{1}{1-yt}\right) = I\left(w * \frac{1}{1-yt}\right) = I\left(\Delta(w) \text{ III } \frac{1}{1-yt}\right) = I(\Delta(w))$$

より従う. (ii) は

$$\sum_{0 < n} \frac{I(\partial_n(w))}{n} (-t)^n = I((\ln \Delta)(w)) = \sum_{0 < n} \frac{(-1)^{n-1} I((\Delta - 1)^n(w))}{n} = 0$$

より, t^n の係数を考えて, $I(\partial_n(w)) = 0$ が従う. □

5.2 Ohno 関係式

Definition 5.11. 同型写像 σ を $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\sigma(x) = x, \quad \sigma(e_z) = e_z \frac{1}{1+xt}$$

で定める. また反自己同型 $\hat{\tau}$ を $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ に対して,

$$\hat{\tau}(x) = y, \hat{\tau}(y) = x, \hat{\tau}(e_z) = -e_{\frac{z}{z-1}} \frac{1}{1 - e_{\frac{z}{z-1}} t}$$

とする.

Proposition 5.12. 以下の等式が成り立つ.

$$\Delta = \tau \circ \sigma \circ \hat{\tau} \circ \sigma^{-1}$$

Proof. 計算により, $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ に対して,

$$\begin{aligned} (\tau \circ \sigma \circ \hat{\tau} \circ \sigma^{-1})(x) &= \frac{1}{1 + yt} x = \Delta(x) \\ (\tau \circ \sigma \circ \hat{\tau} \circ \sigma^{-1})(x + y) &= x + y = \Delta(x + y) \\ (\tau \circ \sigma \circ \hat{\tau} \circ \sigma^{-1})(e_z + x) &= \frac{1}{1 + (e_z - y)t} (e_z + x) = \Delta(e_z + x) \end{aligned}$$

であることから従う. □

Theorem 5.13 (Ohno 関係式; Kawamura-Maesaka-Seki [KMS, Theorem 6.7]). $w \in \mathfrak{C}^0$ に対して,

$$I(\sigma(1 - \hat{\tau})(w)) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 前の命題を用いて, 導分関係式と双対性によって,

$$I(\sigma(\tau - 1)(w)) = I((\tau \circ \sigma \circ \hat{\tau} - \sigma)(w)) = I((\Delta - 1)(\sigma(w))) = 0$$

と示される. □

6 巡回和公式

6.1 巡回和公式

Definition 6.1. $w = x^{k_1-1} e_{z_1} x^{k_2-1} \dots e_{z_{r-1}} x^{k_r-1} \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$Z(w) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z_1^{n_2-n_1} \dots z_{r-1}^{n_r-n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \frac{n_1}{n_r - n_1}$$

と定義する.

$w = e_{z_1} \cdots e_{z_r}$ が $|z_i| \leq 1$ であり, z_i の少なくとも 1 つは 1 でないとき, この和は収束することが分かる.

Definition 6.2. 線形写像 c を $w \in \mathfrak{C}, z \in \widehat{\mathfrak{C}}$ に対して,

$$c(we_z) := e_z w$$

によって定め, 単項式 $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$C(w) := \sum_{i=0}^{\text{wt}(w)-1} c^i(w)$$

と線形写像 C を定義する. また, 写像 β を $z \in \widehat{\mathfrak{C}}$ に対して,

$$\beta(we_z) = (e_z - y)we_z + e_z wx$$

と定義する.

Theorem 6.3 (巡回和公式). $y^n, 0 \leq n$ を項として含まないような $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$I(\beta(C(w))) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 部分分数分解によって,

$$Z(wx) = -I(ywx) + Z(xw)$$

分かる. また, $|z| < 1$ に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{n < a} \frac{z^{a-n}}{a(a-m)} &= \frac{1}{m} \sum_{n < a} \left(\frac{z^{a-n}}{a-m} - \frac{z^{a-n}}{a} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\sum_{n < a} \left(\frac{z^{a-n+m}}{a} - \frac{z^{a-n}}{a} \right) + \sum_{n-m < a \leq n} \frac{z^{a-n+m}}{a} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\sum_{n < a} \left(\frac{z^{a-n+m}}{a} - \frac{z^{a-n}}{a} \right) + \sum_{0 \leq a < m} \frac{z^{m-a}}{n-a} \right) \end{aligned}$$

であることから,

$$Z(we_z) = I((e_z - y)we_z) + I(e_z wx) + Z(e_z w)$$

が従う。よって、いずれの場合も

$$Z(w) = Z(c(w)) + I(\beta(w))$$

が成り立つ。よってこれを $c^i(w), i = 0, \dots, \text{wt}(w) - 1$ に対して足し合わせて定理を得る。 \square

$w = e_{z_1} x^{k_1-1} \dots e_{z_r} x^{k_r-1}$ を代入し、Li を用いてより具体的に書くと、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{k_r-1} \text{Li}_{j+1, k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_{i-1}, k_i-j} (1, z_{i+1}, \dots, z_r, z_1, \dots, z_i) \\ &= \sum_{i=1}^r (\text{Li}_{k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_i, 1} (z_{i+1}, \dots, z_r, z_1, \dots, z_{i+1}) \\ & \quad + \text{Li}_{k_{i+1}, \dots, k_r, k_1, \dots, k_{i-1}, k_i+1} (z_{i+1}, \dots, z_r, z_1, \dots, z_i)) \end{aligned}$$

となることが分かる。ただし、 $z_i = 1$ のときは反復積分によって正規化した値を用いるとする。

6.2 交代巡回和公式

Definition 6.4. $w = x^{k_1-1} e_{z_1} x^{k_2-1} \dots e_{z_{r-1}} x^{k_r-1} \in \mathfrak{C}$ に対して、

$$\tilde{Z}(w) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{z_1^{n_2-n_1} \dots z_{r-1}^{n_r-n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \frac{n_1}{n_1 + n_r}$$

と定義する。

$w = e_{z_1} \dots e_{z_r}$ が $|z_i| \leq 1$ であり、 z_i の少なくとも1つは1でないとき、この和は収束することが分かる。

Definition 6.5. 線形写像 \tilde{c} を $w \in \mathfrak{C}, z \in \hat{\mathfrak{C}}$ に対して、

$$\tilde{c}(we_z) := (e_{z-1} + x)w$$

によって定め、単項式 $w \in \mathfrak{C}$ に対して、

$$\tilde{C}(w) := \sum_{i=0}^{2\text{wt}(w)-1} \tilde{c}^i(w)$$

と線形写像 \tilde{C} を定義する. また, 線形写像 $\tilde{\beta}$ を $z \in \widehat{\mathcal{C}}$ として,

$$\tilde{\beta}(we_z) = (y - e_{z^{-1}})we_z$$

と定義する.

Theorem 6.6 (交代巡回和公式). $y^n, 0 \leq n$ を項として含まないような $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$I(\tilde{\beta}(\tilde{C}(w))) = 0$$

が成り立つ.

Proof. $w = e_{z_1} \cdots e_{z_r}$ として, $|z_1| = \cdots = |z_r| = 1, |z| = 1$ として示す. 部分分数分解によって,

$$\tilde{Z}(wx) = I(ywx) - \tilde{Z}(xw)$$

が成り立つ. また,

$$\begin{aligned} \sum_{n < a} \frac{z^{a-n}}{a(m+a)} &= \frac{1}{m} \sum_{n < a} \left(\frac{z^{a-n}}{a} - \frac{z^{a-n}}{m+a} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\sum_{n < a} \left(\frac{z^{a-n}}{a} - \frac{z^{a-n-m}}{a} \right) + \sum_{n < a \leq n+m} \frac{z^{a-n-m}}{a} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\sum_{n < a} \left(\frac{z^{a-n}}{a} - \frac{z^{a-n-m}}{a} \right) + \sum_{0 < a \leq m} \frac{z^{a-m}}{a+n} \right) \end{aligned}$$

より,

$$\tilde{Z}(we_z) = I((y - e_{z^{-1}})we_z) + \tilde{Z}((e_{z^{-1}} + x)w)$$

これらより,

$$\tilde{Z}(w) = I(\tilde{\beta}(w)) + \tilde{Z}(\tilde{c}(w))$$

が成り立つ. よって $\tilde{c}^i(w), i = 0, \dots, 2\text{wt}(w) - 1$ に対して足し合わせて定理が示される. \square

6.3 双対巡回和公式

Definition 6.7. 線形写像 c^\vee を $w \in \mathfrak{C}, z \in \widehat{\mathcal{C}}$ に対して,

$$c^\vee(we_z) := (e_{1-z} - y)w$$

によって定め, 単項式 $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$C^\vee(w) := \sum_{i=0}^{2\text{wt}(w)-1} (c^\vee)^i(w)$$

と線形写像 C^\vee を定義する. また, 線形写像 β^\vee を $z \in \widehat{\mathfrak{C}}$ として,

$$\beta^\vee(e_z w) = e_z w(e_{1-z} + x)$$

と定義する.

Theorem 6.8 (双対巡回和公式). $x^n, 0 \leq n$ を項として含まないような $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$I(\beta^\vee(C^\vee(w))) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 計算により,

$$\tau \circ \tilde{\beta} \circ \tau = \beta^\vee, \quad \tau \circ \tilde{C} \circ \tau = C^\vee$$

であることが確かめられるから, 交代巡回和公式によって

$$I(\beta^\vee(C^\vee(w))) = I(\tau(\tilde{\beta}(\tilde{C}(\tau(w)))))) = I(\tilde{\beta}(\tilde{C}(\tau(w)))) = 0$$

が成り立つ. □

参考文献

- [BBBL] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. K. Broadhurst, P. Lisonek, Special values of multiple polylogarithms, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001), 907–941.
- [KMS] H. Kawamura, T. Maesaka, and S. Seki, Multivariable connected sums and multiple polylogarithms, *Res. Math. Sci.* 9 (2022), no. 1, Paper No. 4, 25
- [SS] K. Sakugawa, S. Seki, On functional equations of finite multiple polylogarithms, *Journal of Algebra*, 469 (2017), 323–357