多重ポリログ

nkswtr

目次

1　1 変数多重ポリログ

1.1　Landen 型接続公式

Definition 1.1. インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $|z| < 1$ に対して,

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$
$$\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}(z) := \sum_{0<n_1\leq\cdots\leq n_r} \frac{z^{n_r}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

と定義する.

x, y に対応する微分形式をそれぞれ $\frac{dt}{t}, \frac{dt}{1-t}$ として, $[0, z]$ における反復積分を I_z と書くことにすると, $\mathrm{Li}, \mathrm{Li}^{\star}$ はそれぞれ反復積分表示

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) = I_z(yx^{k_1-1}yx^{k_2-1} \cdots yx^{k_r-1})$$
$$\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}(z) = I_z(yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1} \cdots (y+x)x^{k_r-1})$$

を持つ. これによって, $|z| < 1$ の外側へと解析接続できる.

Theorem 1.2 (Landen 型接続公式)**.** 複素数 z に対して,

$$\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}(z) = -\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}^{\vee}}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Proof. 反復積分表示

$$\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}(z) = I_z(yx^{k_1-1}(y+x)x^{k_2-1} \cdots (y+x)x^{k_r-1})$$

において, 変数変換 $t \to \frac{t}{t-1}$ を行うと, $x \to x+y, y \to -y$ となって示される. □

Hoffman 代数を用いれば, これは同型写像 $\phi(x) = x + y, \phi(y) = -y$ を用いて,

$$\mathrm{Li}_{w}(z) = \mathrm{Li}_{\phi(w)}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

と表すこともできる.

1.2　反復積分の合成公式

Definition 1.3. $0 \leq a \leq b \leq 1$ に対して, $[a,b]$ における反復積分を $I(a;w;b)$ とする.

$w \in \mathfrak{H}$ に対して, $w_{i,j} \in \mathfrak{H}^0$ があって,

$$w = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x^i ш w_{i,j} ш y^j$$

と書くことができる. よって, 正規化された反復積分の値が

$$I(a;x;b) = \ln b - \ln a, \quad I(a;y;b) = -\ln(1-b) + \ln(1-a)$$

とシャッフル積によって一意的に定まる. これによって多重ゼータ値を $w \in \mathfrak{H}$ の元に対して

$$\zeta^{ш}(w) = I(w)$$

によって定義できる.

Theorem 1.4. $0 \leq a \leq b \leq 1$, 単項式 $w \in \mathfrak{H}$ と, $0 \leq c \leq 1$ に対して,

$$I(a;w;b) = \sum_{w_1 w_2 = w} I(a;w_1;c) I(c;w_2;b)$$

が成り立つ.

1.3　$z = 1$ における接続公式

Theorem 1.5. 反自己同型 τ を $\tau(x) = y, \tau(y) = x$ とする. 単項式 $w \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\sum_{w_1 w_2 = w} I_z(w_1) I_{1-z}(\tau(w_2)) = \zeta(w)$$

が成り立つ.

Proof. 合成公式より,

$$\zeta(w) = I(0;w;1) = \sum_{w_1 w_2 = w} I(0;w_1;z) I(z;w_2;1) = \sum_{w_1 w_2 = w} I_z(w_1) I_{1-z}(\tau(w_2))$$

$\square$

例えば $w=yx$ とすると,

$$\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2(1-z)+\ln z\ln(1-z)=\zeta(2)$$

が得られる.

Theorem 1.6. 単項式 $w\in\mathfrak{H}$ に対して,

$$I_{1-z}(w)=\sum_{w_1w_2=\tau(w)}(-1)^{\mathrm{wt}(w_1)}I_z(\overleftarrow{w_1})\zeta^{ш}(w_2)$$

が成り立つ. ここで, $\overleftarrow{u_1\cdots u_r}=u_r\cdots u_1, u_i\in\{x,y\}$ とする.

Proof.

$$\begin{aligned}I_{1-z}(w)=I(0;w;1-z)&=I(z;\tau(w);1)\\&=\sum_{w_1w_2=\tau(w)}I(z;w_1;0)I(0;w_2;1)\\&=\sum_{w_1w_2=\tau(w)}(-1)^{\mathrm{wt}(w_1)}I_z(\overleftarrow{w_1})\zeta^{ш}(w_2)\end{aligned}$$

□

$w=yx$ とすると,

$$\mathrm{Li}_2(1-z)=I_z(xy)+\zeta(2)=-\ln z\ln(1-z)-\mathrm{Li}_2(z)+\zeta(2)$$

となって先ほどと同じ式が得られる. $w=y^2x$ とすると,

$$\mathrm{Li}_{1,2}(1-z)=-I_z(x^2y)+\zeta(3)=\frac{1}{2}\ln^2 z\ln(1-z)+\ln z\mathrm{Li}_2(z)-\mathrm{Li}_3(z)+\zeta(3)$$

が得られる.

2 多変数多重ポリログの導入

2.1 多重ポリログ

前の節で扱った多重ポリログを多変数に拡張する.

Definition 2.1 (多重ポリログ)**.** インデックス $\boldsymbol{k}$ と複素数 $|z_1|,\dots,|z_r|<1$ に対して, 多変数の多重ポリログを以下のように定義する.

$$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(z_1,\dots,z_r):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{z_1^{n_1}z_2^{n_2-n_1}\cdots z_r^{n_r-n_{r-1}}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$
$$\mathrm{Li}^{\star}_{k_1,\dots,k_r}(z_1,\dots,z_r):=\sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r}\frac{z_1^{n_1}z_2^{n_2-n_1}\cdots z_r^{n_r-n_{r-1}}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

インデックス $\boldsymbol{k}$ の深さが 1 のときの

$$\mathrm{Li}_k(z)=\sum_{0<n}\frac{z^n}{n^k}$$

はポリログまたは多重対数関数と呼ばれている.

Definition 2.2. $0\le r, z_1,\dots,z_r\in\widehat{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ による

$$e_{z_1}\cdots e_{z_r}$$

という形の元全体から $\mathbb{C}$ 上生成される空間を $\mathfrak{C}$ と定義する. ただし, 相異なる z_1,z_2 に対して積は非可換

$$e_{z_1}e_{z_2}\neq e_{z_2}e_{z_1}$$

であるとする.

$$e_{z_1}\cdots e_{z_r},\quad z_1\neq\infty$$

という形の元全体から $\mathbb{C}$ 上生成される空間を $\mathfrak{C}^1$ と定義し, $\mathfrak{C}^1$ の中で, さらに $z_r\neq 1$ であるような元全体を $\mathfrak{C}^0$ とする.

これらは $x=-e_\infty, y=e_1$ とすることによって, Hoffman 代数 $\mathfrak{H},\mathfrak{H}^1,\mathfrak{H}^0$ の拡張となっている.

3 双対性

3.1 反復積分表示

e_z に対応する微分形式を $\frac{zdt}{1-zt}$ とすると, 反復積分表示

$$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(z_1z,\dots,z_rz)=I_z(e_{z_1}x^{k_1-1}\cdots e_{z_r}x^{k_r-1})$$

が成り立つことが分かる．ここで, 右辺の単項式は $x = -e_\infty$ と見なすことによって $\mathfrak{C}$ の元となる．特に $z = 1$ として,

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z_1,\ldots,z_r) = I(e_{z_1}x^{k_1-1}\cdots e_{z_r}x^{k_r-1})$$

を得る．よって, この反復積分表示によって, $|z_i| < 1$ より十分広い範囲に解析接続できる．以下, この解析接続ができるので, 範囲に関してはあまりこだわらずに $w \in \mathfrak{C}$ と書くことにする．

3.2　双対性

Theorem 3.1 (一般化された双対性)**.** $\alpha \in \mathbb{C}$ とする．$w \in \mathfrak{C}$ に対して, 反自己同型 τ_α を $\tau_\alpha(e_z) = e_\alpha - e_{\frac{\alpha-z}{1-z}}$ で定める．このとき,

$$I(w) = I(\tau_\alpha(w))$$

が成り立つ．

Proof. 反復積分表示において, $t \to \frac{1-t}{1-\alpha t}$ とすればよい． □

$e_{\frac{\alpha-z}{1-z}}$ は $z = 1$ のときは, $e_\infty = -x$ となり, $z = \infty$ のときは $e_{\frac{\alpha-z}{1-z}} = e_1$ となる．よって $\tau_\alpha(x) = y - e_\alpha, \tau_\alpha(y) = x + e_\alpha$ となる．$\alpha = 0$ として以下を得る．

Corollary 3.2 (双対性; Borwein-Bradley-Broadhurst-Lisonek [BBBL])**.** $w \in \mathfrak{C}$ に対して, 反自己同型 τ を $\tau(e_z) = -e_{\frac{z}{z-1}}$ で定める．このとき,

$$I(w) = I(\tau(w))$$

が成り立つ．

これは多重ゼータ値の双対性,

$$\zeta(\boldsymbol{k}) = \zeta(\boldsymbol{k}^\dagger)$$

の一般化である．$y = e_1$ として, 具体例を挙げると, $w = e_z x^{k-1}$ に対し,

$$I(e_z x^{k-1}) = -I(y^{k-1}e_{\frac{z}{z-1}})$$

が得られる．Li で書き直すと,

$$\mathrm{Li}_k(z) = -\mathrm{Li}_{\{1\}^k}\left(\{1\}^{k-1}, \frac{z}{z-1}\right)$$

となる.

また, $w = e_{z_1} \cdots e_{z_r}, z_i \in \mathbb{C}$ とすると,

$$\mathrm{Li}_{\{1\}^r}(z_1, \ldots, z_r) = (-1)^r \mathrm{Li}_{\{1\}^r}\left(\frac{z_r}{z_r - 1}, \ldots, \frac{z_1}{z_1 - 1}\right)$$

が得られる.

3.3 Sakugawa-Seki の恒等式

Proposition 3.3 (一般化された Landen 型接続公式)**.** $w \in \mathfrak{C}$ に対して, 同型写像 ϕ を $\phi(e_z) = e_{1-z} - y$ によって定める. ただし $z = \infty$ のとき, $\phi(x) = x + y$ とする. このとき,

$$I_z(w) = I_{\frac{z}{z-1}}(\phi(w))$$

が成り立つ.

Proof. 反復積分表示において, $t \to \frac{t}{t-1}$ とすればよい. □

$w = e_{z_1} x^{k_1 - 1} \cdots e_{z_r} x^{k_r - 1}$ に対して,

$$I_{\le n}(w) := \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r \le n} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2 - n_1} \cdots z_r^{n_r - n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

$$H_{\le n}(w) := \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r \le n} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2 - n_1} \cdots z_r^{n_r - n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} (-1)^{n_r} \binom{n}{n_r}$$

とすると,

$$\frac{1}{1-z} I_z(w) = \sum_{0 \le n} I_{\le n}(w) z^n$$

$$\frac{1}{1-z} I_{\frac{z}{z-1}}(w) = \sum_{0 \le n} H_{\le n}(w) z^n$$

が成り立つことが分かる. よって z^n の係数を比較して, 以下が従う.

Corollary 3.4 (Sakugawa-Seki の恒等式; Sakugawa-Seki [SS, Theorem 2.5])**.** 正整数 n と $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$I_{\le n}(w) = H_{\le n}(\phi(w))$$

が成り立つ.

$w = e_z$ としてみると，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-z)^k - 1}{k} (-1)^k \binom{n}{k}$$

が得られる．

4　複シャッフル関係式

4.1　シャッフル関係式

Definition 4.1 (シャッフル積)**.** $w_1, w_2, w \in \mathfrak{C}, z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，$u_1 = e_{z_1}, u_2 = e_{z_2}$ として，

$$\begin{aligned} w \sqcup\!\sqcup\, 1_{\mathfrak{C}} &= 1_{\mathfrak{C}} \sqcup\!\sqcup\, w = w \\ w_1 u_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2 u_2 &= (w_1 u_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2) u_2 + (w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2 u_2) u_1 \end{aligned}$$

によって双線形に積 $\sqcup\!\sqcup$ を $\mathfrak{C}$ に定義する．

反復積分表示からシャッフル関係式

$$I(w_1) I(w_2) = I(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2)$$

が成り立つことが分かる．

4.2　調和関係式

Definition 4.2 (調和積)**.** $w_1, w_2, w \in \mathfrak{C}, z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\begin{aligned} w * 1_{\mathfrak{C}} &= 1_{\mathfrak{C}} * w = w \\ x w_1 * w_2 &= w_1 * x w_2 = x(w_1 * w_2) \\ e_{z_1} w_1 * e_{z_2} w_2 &= e_{z_1 z_2} (e_{z_1} w_1 * w_2 + w_1 * e_{z_2} w_2 + x(w_1 * w_2)) \end{aligned}$$

によって双線形に積 $*$ を $\mathfrak{C}$ に定義する．

Theorem 4.3 (調和関係式)**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{C}^0$ に対して，

$$I(w_1) I(w_2) = I(w_1 * w_2)$$

が成り立つ．

Proof. 調和積の定義から,

$$\begin{aligned}e_{z_1}x^{k_1-1}w_1 * e_{z_2}x^{k_2-1}w_2 = e_{z_1z_2}x^{k_1-1}(w_1 * e_{z_2}x^{k_2-1}w_2) + e_{z_1z_2}x^{k_2-1}(e_{z_1}x^{k_1-1}w_1 * w_2)\\ + e_{z_1z_2}x^{k_1+k_2-1}(w_1 * w_2)\end{aligned}$$

が分かる. よって級数表示

$$I_{n<}(e_{z_1}x^{k_1-1}\cdots e_{z_r}x^{k_r-1}) = \sum_{n<n_1<\cdots<n_r} \frac{z_1^{n_1}z_2^{n_2-n_1}\cdots z_r^{n_r-n_{r-1}}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

で積を考えて, 不等号を左から分解することによって帰納的に調和関係式

$$I_{n<}(w_1)I_{n<}(w_2) = I_{n<}(w_1 * w_2)$$

が示されるので, $n=0$ として定理を得る. □

4.3 正規化複シャッフル関係式

Definition 4.4 (シャッフル正規化多項式)**.** 単項式 $w \in \mathfrak{C}$ は $w_{i,j} \in \mathfrak{C}^0$ を用いて

$$w = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x^i ш w_{i,j} ш y^j$$

と一意的に書ける. これを用いて X, Y を変数とする正規化多項式 $I_{X,Y}(w)$ を

$$I_{X,Y}(w) := \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} I(w_{i,j})X^iY^j$$

によって定める.

定義より, $I_{X,Y}$ はシャッフル関係式 $I_{X,Y}(w_1)I_{X,Y}(w_2) = I_{X,Y}(w_1 ш w_2)$ を満たすことが分かる.

Definition 4.5 (調和正規化多項式)**.** シャッフル, 調和正規化多重ゼータ値をそれぞれ $\zeta^{ш}(\boldsymbol{k};Y), \zeta^{*}(\boldsymbol{k};Y)$ で表すとき, 線形写像 ρ を

$$\rho(\zeta^{*}(\{1\}^n;Y)) := \zeta^{ш}(\{1\}^n;Y)$$

で定める. これを用いて, 調和正規化多項式 $I_{X,Y}$ を

$$I^{*}_{X,Y}(w) := \rho^{-1}(I_{X,Y}(w))$$

によって定義する.

$I(w;Y) := I_{0,Y}(w), I^*(w;Y) := I^*_{0,Y}(w)$ とする．$\mathfrak{C}^1$ においては, $|z_i| \leq 1$ ならば多重ゼータ値の場合と同様に $< n$ で考えた和を $n \to \infty$ として漸近挙動を考えることによって, 調和正規化多項式 $I(w;Y)$ が得られる.

Proposition 4.6. $w = e_{z_1} \cdots e_{z_r} \in \mathfrak{C}^1, z_i \in \{|z| < 1; z \in \mathbb{C}\} \cup \{\infty\}$ とする．$N \to \infty$ においてある定数 $0 < m$ があって, 以下の漸近展開が成り立つ.

$$I_{<N}(w) = I^*(w; \zeta_{<N}(1)) + O\left(\frac{\zeta_{<N}(1)^m}{N}\right)$$

Proof. $w_i \in \mathfrak{C}^0$ を用いて

$$w = \sum_{i=0}^{n} w_i * y^i$$

と表せば, $I_{<N}$ が調和関係式を満たすことより従う. □

Theorem 4.7 (正規化調和関係式)**.** $w_1, w_2 \in \mathfrak{C}^1$ とするとき,

$$\sum_{0 \leq h} s^h I^*_{X_1,Y}(x^h w_1) \sum_{0 \leq h} s^h I^*_{X_2,Y}(x^h w_2) = \sum_{0 \leq h} s^h I^*_{X_1+X_2,Y}(x^h (w_1 * w_2))$$

が成り立つ.

Proof. まず,

$$\sum_{0 \leq h} s^h I^*_{X,Y}(x^h w) = e^{Xs} \sum_{0 \leq h} s^h I^*_{0,Y}(x^h w)$$

であるから, $X_1 = X_2 = 0$ の場合を考えれば良い．$w = e_{z_1} x^{k_1 - 1} \cdots e_{z_r} x^{k_r - 1}$ として $< n$ で考えると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{0 \leq h} (-s)^h I_{<n}(e_{z_1}(x^h \sqcup\!\sqcup\, x^{k_1-1} e_{z_2} x^{k_2-1} \cdots e_{z_r} x^{k_r-1})) \\
&= \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r < n} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2 - n_1} \cdots z_r^{n_r - n_{r-1}}}{(n_1 + s)^{k_1} \cdots (n_r + s)^{k_r}}
\end{aligned}$$

が調和関係式を満たすことから, $n \to \infty$ として定理を得る. □

特に定数項を考えると,

$$I^*(w_1;Y) I^*(w_2;Y) = I^*(w_1 * w_2; Y)$$

が得られることが分かる．よって多重ゼータ値の場合と全く同様に次が得られる.

Theorem 4.8 (正規化複シャッフル関係式)**.** $w_0 \in \mathfrak{C}^0, w_1 \in \mathfrak{C}^1$ に対して,

$$I(w_0 \sqcup\!\sqcup\, w_1; Y) = I(w_0 * w_1; Y)$$
$$I^*(w_0 \sqcup\!\sqcup\, w_1; Y) = I^*(w_0 * w_1; Y)$$

Proof. ρ を用いて多重ゼータ値の場合と全く同様に示される. □

5 導分関係式と Ohno 関係式

5.1 導分関係式

Definition 5.1. 写像 $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ は, $w_1, w_2 \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$f(w_1 w_2) = f(w_1) w_2 + w_1 f(w_2)$$

を満たすとき, 導分であるという.

Definition 5.2. $0 < n, w \in \mathfrak{C}^1$ に対して, $d_0^{\sqcup\!\sqcup}, d_0^*$ を恒等写像として,

$$d_n^{\sqcup\!\sqcup}(w) := w \sqcup\!\sqcup\, y^n - (w \sqcup\!\sqcup\, y^{n-1}) y$$
$$d_n^*(w) := w * y^n - (w * y^{n-1}) y$$

と定義する.

$w \in \mathfrak{C}^1, z \in \widehat{\mathbb{C}}, u = e_z$ とすると,

$$d_n^{\sqcup\!\sqcup}(wu) = (w \sqcup\!\sqcup\, y^n) u$$

が成立する.

Proposition 5.3. $w \in \mathfrak{C}^1$ に対して,

$$w \sqcup\!\sqcup\, y^n = \sum_{k=0}^{n} d_k^{\sqcup\!\sqcup}(w) y^{n-k}$$
$$w * y^n = \sum_{k=0}^{n} d_k^*(w) y^{n-k}$$

が成り立つ.

Proof. $w \in \mathfrak{C}^1$ に対して,

$$\sum_{k=0}^{n} d_k^{ш}(w) y^{n-k} = wy^n + \sum_{k=1}^{n} (w ш y^k - (w ш y^{k-1})y) y^{n-k} = w ш y^n$$

によって示される. $*$ の方も全く同様である. $\square$

Proposition 5.4. 写像 $\Phi^{ш}, \Phi^*$ を

$$\Phi^{ш} := \sum_{0 \leq n} t^n d_n^{ш}$$
$$\Phi^* := \sum_{0 \leq n} t^n d_n^*$$

と定めたとき, $\Phi^{ш}, \Phi^*$ は $\mathfrak{C}^1[[t]]$ 上の同型写像であり, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して,

$$\Phi^{ш}(e_z) = \frac{1}{1-yt} e_z$$
$$\Phi^*(e_z) = e_z \left(1 + \frac{t}{1-e_z t}(e_z + x)\right)$$

と定めることによって $\mathfrak{C}[[t]]$ 上の同型写像に自然に拡張できる.

Proof. まず,

$$e_{z_1} \cdots e_{z_r} ш y^h = \sum_{0 \leq a_1, \ldots, a_{r+1}} y^{a_1} e_{z_1} y^{a_2} e_{z_2} \cdots y^{a_r} e_{z_r} y^{a_{r+1}}$$

であることから $\Phi^{ш}$ の方が従う. 次に, 帰納的に

$$e_{z_1} \cdots e_{z_r} * y^h = \sum_{0 \leq a_1, \ldots, a_{r+1}} e_{z_1}^{a_1} (e_{z_1} + (1 - \delta_{a_1,0})x) \cdots e_{z_r}^{a_1} (e_{z_r} + (1 - \delta_{a_r,0})x) y^{a_{r+1}}$$

であることが分かるから, Φ^* の方が従う. $\square$

Proposition 5.5. $w \in \mathfrak{C}^1$ に対して,

$$w ш \frac{1}{1-yt} = \Phi^{ш}(w) \frac{1}{1-yt}$$
$$w * \frac{1}{1-yt} = \Phi^*(w) \frac{1}{1-yt}$$

が成り立つ.

Corollary 5.6. $\Delta := (\Phi^{ш})^{-1} \circ \Phi^{*}$ とするとき,

$$w * \frac{1}{1-yt} = \Delta(w) \,ш\, \frac{1}{1-yt}$$

が成立する.

計算により, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して,

$$\Delta(e_z + x) = \frac{1}{1+(y-e_z)t}(e_z + x)$$

が成り立つこと分かる.

Definition 5.7. 自然数 $0 < n$ と $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して, 導分 ∂_n を

$$\partial_n(e_z + x) = (y - e_z)(x+y)^{n-1}(e_z + x)$$

によって定める.

Proposition 5.8. 同型写像 ϕ を $\phi(x) = y + x, \phi(e_z) = e_{1-z} - y, z \in \mathbb{C}$ とすると, $w \in \mathfrak{C}^1$ に対し,

$$\partial_n(wx) = -\phi(\phi(w) * yx^{n-1})x$$

が成り立つ.

Proof. $\phi \circ \phi$ が恒等写像であるから, $w = e_{z_1} \cdots e_{z_r}, z_i \in \widehat{\mathbb{C}}$ として, $1 - \infty = \infty$ と見なすことにすると,

$$\begin{aligned}
\partial_n(\phi(w)x) &= \partial_n((e_{1-z_1} - y) \cdots (e_{1-z_r} - y)x) \\
&= \sum_{i=1}^{r} (e_{1-z_1} - y) \cdots (e_{1-z_i} - y)(x+y)^{n-1}(e_{1-z_i} + x) \\
&\qquad\qquad \cdot (e_{1-z_{i+1}} - y) \cdots (e_{1-z_r} - y)x \\
&\qquad\qquad\qquad + (e_{1-z_1} - y) \cdots (e_{1-z_r} - y)y(y+x)^{n-1}x \\
&= -\phi(e_{z_1} \cdots e_{z_r} * yx^{n-1})x \\
&= -\phi(w * yx^{n-1})x
\end{aligned}$$

であることから従う. □

Proposition 5.9. 同型写像の間の等式

$$\Delta = \exp\left(\sum_{0<n} \frac{\partial_n}{n}(-t)^n\right)$$

が成立する.

Proof. まず, 1 つ前の命題より,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{0<n}\frac{\partial_n}{n}(-t)^n\right)(wx) &= \phi\left(\phi(w)*\exp_*\left(\sum_{0<n}\frac{(-1)^{n-1}z_n}{n}t^n\right)\right)x \\
&= \phi\left(\phi(w)*\frac{1}{1-yt}\right)x \\
&= \phi\left(\Phi^*(\phi(w))\frac{1}{1-yt}\right)x \\
&= \phi\left(\Phi^*(\phi(wx))\right)
\end{aligned}$$

であり, $\Delta = \phi\circ\Phi^*\circ\phi$ が成り立つことから示される. □

Theorem 5.10 (導分関係式)**.** $w \in \mathfrak{C}^0$ に対して, 以下が成り立つ.

(i) $I(w) = I(\Delta(w))$

(ii) 自然数 $0 < n$ と $w \in \mathfrak{C}^0$ に対して,

$$I(\partial_n(w)) = 0$$

が成り立つ.

Proof. (i) は正規化複シャッフル関係式より, $w \in \mathfrak{C}^0$ に対して,

$$I(w) = I\left(w ш \frac{1}{1-yt}\right) = I\left(w*\frac{1}{1-yt}\right) = I\left(\Delta(w) ш \frac{1}{1-yt}\right) = I(\Delta(w))$$

より従う. (ii) は

$$\sum_{0<n}\frac{I(\partial_n(w))}{n}(-t)^n = I((\ln\Delta)(w)) = \sum_{0<n}\frac{(-1)^{n-1}I((\Delta-1)^n(w))}{n} = 0$$

より, t^n の係数を考えて, $I(\partial_n(w)) = 0$ が従う. □

5.2 Ohno 関係式

Definition 5.11. 同型写像 σ を $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\sigma(x) = x, \quad \sigma(e_z) = e_z\frac{1}{1+xt}$$

で定める. また反自己同型 $\widehat{\tau}$ を $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ に対して,

$$\widehat{\tau}(x) = y, \widehat{\tau}(y) = x, \widehat{\tau}(e_z) = -e_{\frac{z}{z-1}} \frac{1}{1 - e_{\frac{z}{z-1}} t}$$

とする.

Proposition 5.12. 以下の等式が成り立つ.

$$\Delta = \tau \circ \sigma \circ \widehat{\tau} \circ \sigma^{-1}$$

Proof. 計算により, $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ に対して,

$$(\tau \circ \sigma \circ \widehat{\tau} \circ \sigma^{-1})(x) = \frac{1}{1 + yt} x = \Delta(x)$$
$$(\tau \circ \sigma \circ \widehat{\tau} \circ \sigma^{-1})(x + y) = x + y = \Delta(x + y)$$
$$(\tau \circ \sigma \circ \widehat{\tau} \circ \sigma^{-1})(e_z + x) = \frac{1}{1 + (e_z - y)t}(e_z + x) = \Delta(e_z + x)$$

であることから従う. □

Theorem 5.13 (Ohno 関係式; Kawamura-Maesaka-Seki [KMS, Theorem 6.7])**.** $w \in \mathfrak{C}^0$ に対して,

$$I(\sigma(1 - \widehat{\tau})(w)) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 前の命題を用いて, 導分関係式と双対性によって,

$$I(\sigma(\tau - 1)(w)) = I((\tau \circ \sigma \circ \widehat{\tau} - \sigma)(w)) = I((\Delta - 1)(\sigma(w))) = 0$$

と示される. □

6 巡回和公式

6.1 巡回和公式

Definition 6.1. $w = x^{k_1 - 1} e_{z_1} x^{k_2 - 1} \cdots e_{z_{r-1}} x^{k_r - 1} \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$Z(w) := \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r} \frac{z_1^{n_2 - n_1} \cdots z_{r-1}^{n_r - n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \frac{n_1}{n_r - n_1}$$

と定義する.

$w = e_{z_1} \cdots e_{z_r}$ が $|z_i| \le 1$ であり, z_i の少なくとも 1 つは 1 でないとき, この和は収束することが分かる.

Definition 6.2. 線形写像 c を $w \in \mathfrak{C}, z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して,

$$c(we_z) := e_z w$$

によって定め, 単項式 $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$C(w) := \sum_{i=0}^{\mathrm{wt}(w)-1} c^i(w)$$

と線形写像 C を定義する. また, 写像 β を $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して,

$$\beta(we_z) = (e_z - y)we_z + e_z wx$$

と定義する.

Theorem 6.3 (巡回和公式)**.** $y^n, 0 \le n$ を項として含まないような $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$I(\beta(C(w))) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 部分分数分解によって,

$$Z(wx) = -I(ywx) + Z(xw)$$

分かる. また, $|z| < 1$ に対して,

$$\begin{aligned}
\sum_{n<a} \frac{z^{a-n}}{a(a-m)} &= \frac{1}{m} \sum_{n<a} \left(\frac{z^{a-n}}{a-m} - \frac{z^{a-n}}{a} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{n<a} \left(\frac{z^{a-n+m}}{a} - \frac{z^{a-n}}{a} \right) + \sum_{n-m<a\le n} \frac{z^{a-n+m}}{a} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{n<a} \left(\frac{z^{a-n+m}}{a} - \frac{z^{a-n}}{a} \right) + \sum_{0\le a<m} \frac{z^{m-a}}{n-a} \right)
\end{aligned}$$

であることから,

$$Z(we_z) = I((e_z - y)we_z) + I(e_z wx) + Z(e_z w)$$

が従う．よって, いずれの場合も

$$Z(w) = Z(c(w)) + I(\beta(w))$$

が成り立つ．よってこれを $c^i(w), i = 0, \ldots, \mathrm{wt}(w) - 1$ に対して足し合わせて定理を得る． □

$w = e_{z_1} x^{k_1-1} \cdots e_{z_r} x^{k_r-1}$ を代入し, Li を用いてより具体的に書くと,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{k_r-1} \mathrm{Li}_{j+1,k_{i+1},\ldots,k_r,k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-j}(1, z_{i+1}, \ldots, z_r, z_1, \ldots, z_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} (\mathrm{Li}_{k_{i+1},\ldots,k_r,k_1,\ldots,k_i,1}(z_{i+1}, \ldots, z_r, z_1, \ldots, z_{i+1}) \\
&\qquad\qquad + \mathrm{Li}_{k_{i+1},\ldots,k_r,k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1}(z_{i+1}, \ldots, z_r, z_1, \ldots, z_i))
\end{aligned}$$

となることが分かる．ただし, $z_i = 1$ のときは反復積分によって正規化した値を用いるとする．

6.2 交代巡回和公式

Definition 6.4. $w = x^{k_1-1} e_{z_1} x^{k_2-1} \cdots e_{z_{r-1}} x^{k_r-1} \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$\widetilde{Z}(w) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{z_1^{n_2-n_1} \cdots z_{r-1}^{n_r-n_{r-1}}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \frac{n_1}{n_1+n_r}$$

と定義する．

$w = e_{z_1} \cdots e_{z_r}$ が $|z_i| \leq 1$ であり, z_i の少なくとも 1 つは 1 でないとき, この和は収束することが分かる．

Definition 6.5. 線形写像 $\widetilde{c}$ を $w \in \mathfrak{C}, z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して,

$$\widetilde{c}(we_z) := (e_{z^{-1}} + x)w$$

によって定め, 単項式 $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$\widetilde{C}(w) := \sum_{i=0}^{2\mathrm{wt}(w)-1} \widetilde{c}^i(w)$$

と線形写像 $\widetilde{C}$ を定義する. また, 線形写像 $\widetilde{\beta}$ を $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ として,

$$\widetilde{\beta}(we_z) = (y - e_{z^{-1}})we_z$$

と定義する.

Theorem 6.6 (交代巡回和公式)**.** $y^n, 0 \leq n$ を項として含まないような $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$I(\widetilde{\beta}(\widetilde{C}(w))) = 0$$

が成り立つ.

Proof. $w = e_{z_1} \cdots e_{z_r}$ として, $|z_1| = \cdots = |z_r| = 1, |z| = 1$ として示す. 部分分数分解によって,

$$\widetilde{Z}(wx) = I(ywx) - \widetilde{Z}(xw)$$

が成り立つ. また,

$$\begin{aligned}
\sum_{n<a} \frac{z^{a-n}}{a(m+a)} &= \frac{1}{m} \sum_{n<a} \left(\frac{z^{a-n}}{a} - \frac{z^{a-n}}{m+a} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{n<a} \left(\frac{z^{a-n}}{a} - \frac{z^{a-n-m}}{a} \right) + \sum_{n<a\leq n+m} \frac{z^{a-n-m}}{a} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{n<a} \left(\frac{z^{a-n}}{a} - \frac{z^{a-n-m}}{a} \right) + \sum_{0<a\leq m} \frac{z^{a-m}}{a+n} \right)
\end{aligned}$$

より,

$$\widetilde{Z}(we_z) = I((y - e_{z^{-1}})we_z) + \widetilde{Z}((e_{z^{-1}} + x)w)$$

これらより,

$$\widetilde{Z}(w) = I(\widetilde{\beta}(w)) + \widetilde{Z}(\widetilde{c}(w))$$

が成り立つ. よって $\widetilde{c}^i(w), i = 0, \ldots, 2\mathrm{wt}(w) - 1$ に対して足し合わせて定理が示される. $\square$

6.3 双対巡回和公式

Definition 6.7. 線形写像 $c^{\vee}$ を $w \in \mathfrak{C}, z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して,

$$c^{\vee}(we_z) := (e_{1-z} - y)w$$

によって定め, 単項式 $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$C^\vee(w) := \sum_{i=0}^{2\mathrm{wt}(w)-1} (c^\vee)^i(w)$$

と線形写像 $C^\vee$ を定義する. また, 線形写像 $\beta^\vee$ を $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ として,

$$\beta^\vee(e_z w) = e_z w(e_{1-z} + x)$$

と定義する.

Theorem 6.8 (双対巡回和公式)**.** $x^n, 0 \leq n$ を項として含まないような $w \in \mathfrak{C}$ に対して,

$$I(\beta^\vee(C^\vee(w))) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 計算により,

$$\tau \circ \widetilde{\beta} \circ \tau = \beta^\vee, \quad \tau \circ \widetilde{C} \circ \tau = C^\vee$$

であることが確かめられるから, 交代巡回和公式によって

$$I(\beta^\vee(C^\vee(w))) = I(\tau(\widetilde{\beta}(\widetilde{C}(\tau(w))))) = I(\widetilde{\beta}(\widetilde{C}(\tau(w)))) = 0$$

が成り立つ. □

参考文献

[BBBL] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. K. Broadhurst, P. Lisonek, Special values of multiple polylogarithms, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 907–941.

[KMS] H. Kawamura, T. Maesaka, and S. Seki, Multivariable connected sums and multiple polylogarithms, Res. Math. Sci. 9 (2022), no. 1, Paper No. 4, 25

[SS] K. Sakugawa, S. Seki, On functional equations of finite multiple polylogarithms, Journal of Algebra, 469 (2017), 323–357