級数 I

nksw tr

2021 年 7 月 12 日

この PDF は, 級数についてできるだけ前提知識を仮定せずに解説したものである. そして全て積分を用いずに証明を記述することにした. その理由としては, 級数に関する等式はできるだけ級数変形だけで示すことが本質的に重要だという筆者の考えがあり, より初等的な級数変形による証明を書くことがその考えをより深めてくれると思ったからである. 級数は初等的に扱える対象であるが, 様々な観点からのアプローチが存在し, 深い数学と関わっていることもあるのが魅力の 1 つであると思う. それらの別のアプローチについてはまたいずれ別の機会にでも書きたいと思う.

目次

1 級数の収束性

この節では, 後に必要となる級数の収束性に関するいくつかの定理を用意する.

1.1 記法

特に断らない限り, n, m は自然数を表すものとする. ここで, 自然数は 0 を含めないとする. 複素数列 $\{a_n\}$ に対し, 整数 r, s が $r > s$ のとき,

$$\sum_{n=r}^{s} a_n := 0$$

と約束する. $\sum$ の下に条件を書いたとき, その条件を満たす整数の組全体の和とする. 例えば,

$$\sum_{0<n<m} a_{n,m}$$

と書いたとき, $0 < n < m$ を満たす (n, m) の組全体について, $a_{n,m}$ を足し合わせるということである. また,

$$\sum_{n} a_n$$

は特に断らない限り, 整数全体をわたる和とする.

同様に積記号を, 複素数列 $\{a_n\}$ に対し, 整数 r, s が $r > s$ のとき,

$$\sum_{n=r}^{s} a_n := 1$$

と約束する.

Kronecker のデルタを

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

と定める.

Landau の記号,

$$f(x) = g(x) + O(h(x)), \quad (x \to a)$$

による表記を, $a \in \mathbb{C}$ のとき, ある定数 $\delta > 0$ と $M > 0$ が存在し, 任意の $|x - a| < \delta$ に対し,

$$|f(x)| < M|g(x)|$$

であることと定める. また, $a = \infty$ のときは, ある定数 $R > 0$ と $M > 0$ が存在し, 任意の $|x| > R$ に対し,

$$|f(x)| < M|g(x)|$$

であることと定める. 無限大については, 0 でない有限値 c に対し,

$$\frac{c}{0} = \infty, \quad \frac{c}{\infty} = 0, \quad c \pm \infty = c \cdot \infty = \infty$$

のように定めるとする. ただし,

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0} \quad 0 \cdot \infty$$

などは不定形といい, 値を定めないとする.

1.2 収束性に関する定理

次の定理は個人的に面白いと思っている級数の収束判定法である.

Theorem 1.1. a_n を非負な単調減少数列とする. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することは,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

が収束することと同値である.

Proof. 以下の式変形により, 片方は示される.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^N-1} a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^{N-1}} + \cdots + a_{2^N-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{N-1}a_{2^{N-1}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^n}.\end{aligned}$$

もう一方は, 以下のように示される.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^N} a_n &= \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{N-1}+1} + \cdots + a_{2^N}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{N-1}a_{2^N} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} 2^n a_{2^n}.\end{aligned}$$

□

これにより, 積分を用いることなく次の収束判定ができるのである.

Theorem 1.2. $\sum_{0<n} n^{-\alpha}$ は $\alpha \leq 1$ のとき発散し, $1 < \alpha$ のとき, 収束する.

Proof. Theorem 1.1 より,

$$\sum_{0\leq n} 2^n (2^n)^{-\alpha} = \sum_{0\leq n} 2^{n(1-\alpha)}$$

の収束, 発散を考えることにより, 定理を得る. □

上の定理において, 実数乗が前提知識として仮定されているが, 指数関数や対数関数の正確な定義は後に与えることにする.

Riemann ゼータ関数を $1 < s$ に対し,

$$\zeta(s) := \sum_{0<n} \frac{1}{n^s}$$

と定義しておく. 上の定理により, これは収束することがわかる. s が自然数のときの $\zeta(s)$ の値を Riemann ゼータ値という. 複素数への拡張は後に述べる.

Theorem 1.3. $\sum_{1<n} n^{-1}(\ln n)^{-\alpha}$ は $\alpha \leq 1$ のとき発散し, $1 < \alpha$ のとき, 収束する.

Proof. Theorem 1.1 より,

$$\sum_{0<n} 2^n (2^n)^{-1} (\ln 2^n)^{-\alpha} = (\ln 2)^{-\alpha} \sum_{0<n} n^{-\alpha}$$

の収束, 発散を考えることにより, 定理を得る. □

同様の手法を用いて, $\sum (n \ln n)^{-1} (\ln \ln n)^{-\alpha}$ などの収束条件を得ることができるが, それはここでは割愛する.

次の定理が実用的に重要である. より精密な判定法については必要に応じて微積分の教科書を参照するとよい.

Theorem 1.4 (d'Alembert's ratio test)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は, $\alpha = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ が収束するとき, $\alpha < 1$ のとき収束, $\alpha > 1$ のとき発散する.

Proof. $\alpha < 1$ のとき, $\alpha < \beta < 1$ となる β をとり, 仮定より十分大きな N をとると, 任意の $n \geq N$ に対し, $|a_{n+1}| < \beta |a_n|$ である. これを繰り返し用いて, 任意の $n \geq N$ に対し, $|a_n| < \beta^{n-N} |a_N|$ が得られる. よって級数は収束する. $1 < \alpha$ のときも全く同様に示される. □

1.3 絶対収束

Definition 1.5. 級数 $\sum_{0<n} a_n$ は $\sum_{0<n} |a_n|$ が収束するとき, 絶対収束するという.

級数が絶対収束するということは, 項の順番を自由に入れ替えて良いということである. よって, 絶対収束している場合はそうでない場合より級数が扱いやすくなるのである.

Proposition 1.6. 級数 $\sum_{0<n} a_n$ が絶対収束するならば, 収束する.

Proof. 三角不等式

$$\left| \sum_{0<n} a_n \right| \leq \sum_{0<n} |a_n|$$

より分かる. □

1.4 一様収束

一様収束性に関する基本的な定理を示しておく.

Definition 1.7. 関数列 $\{f_n\}$ に対し, $f_n \to f$ が $S \subset \mathbb{C}$ 上で一様収束であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 自然数 N が存在し, 任意の $n > N$ と $x \in S$ に対し,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つことである.

$S \subset \mathbb{C}$ の任意の有界閉集合上で一様収束することを, S 上でコンパクト一様収束するという.

Theorem 1.8. $M_n = \sup_{x \in S} |f_n(x)|$ とする, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するならば, $\sum_{n=1}^{N} f_n$ が S 上一様収束する. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は一様収束するという.

Proof.

$$\begin{aligned}\sup_{x \in S}\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| &= \sup_{x \in S}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n.\end{aligned}$$

ここで, $N \to \infty$ として右辺が 0 に収束することにより, 定理を得る. □

Theorem 1.9. $S \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が f に S 上一様収束するならば, f は S 上の連続関数である.

Proof. $\varepsilon > 0, a \in S$ を任意にとる. f_n の連続性より, 十分小さく δ をとれば, 任意の $|x - a| < \delta$ に対し,

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$$

である. また, $f_n \to f$ が一様収束であることにより, 十分大きく N をとれば任意の $n > N$ と $x \in S$ に対し,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

である, よって,

$$|f(x) - f(a)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < 3\varepsilon.$$

□

1.5 べき級数

べき級数は代表的な級数で, これから扱う多くの級数がべき級数である.

Definition 1.10. a_n を複素数列とする.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

の形の級数をべき級数といい, べき級数で表されるような f を解析関数という. $|x| < R$ のとき収束し, $R < |x|$ のとき発散するような実数 R が存在するとき, R を収束半径という. そのような R が存在しないとき, $R = \infty$ と定義する. $\{x \in \mathbb{C}; |x| < R\}$ を収束円という.

Theorem 1.11. a_n を複素数列とする. べき級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

の収束半径は, $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ が収束するとき,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

で与えられる.

Proof.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

だから, Theorem 1.4 より,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

とすれば, $|x| < R$ のとき収束, $|x| > R$ のとき発散する. □

Theorem 1.12. べき級数は収束円内で連続である.

Proof. R を収束半径とし, 任意に収束円内の点 r をとる. このとき $|r| < R_0 < R$ をとると, $|x| \leq R_0$ に対し, $|a_n x^n| < |a_n| R_0^n$ と, Theorem 1.8 より, べき級数は $|x| \leq R_0$ 上で一様収束する. よって, Theorem 1.9 により, べき級数は r において連続である. r は任意だったから収束円内で連続である. □

次の定理は非常に強力な定理である．これを用いることによって，べき級数に関する等式はより容易に証明できることがある．

Theorem 1.13 (一致の定理)**.** 2 つのべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ を考える．0 を集積点に持つ集合の上で，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

ならば，$a_n = b_n$ である．

Proof. $c_n = a_n - b_n$ とすることにより，

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

ならば，$c_n = 0$ であることを示せばよい．$c_n \neq 0$ となる n が存在したとし，その最小の N をとる．このとき，両辺を x^N で割り，

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+N} x^n = 0.$$

ここで，$x \to 0$ とすると，$c_N = 0$ を得る．これは矛盾である． □

Theorem 1.14 (Abel の連続性定理)**.** 収束半径 1 のべき級数の $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対し，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとする．このとき，$|x| < 1$ で，$\frac{|1-x|}{1-|x|}$ が有界であるように $x \to 1$ とすると，

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ．

Proof. 定数を加えて，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ であるとしてよい．$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分大きく N をとると，任意の $n > N$ に対し，$|s_n| < \varepsilon$ となるから，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n \\
&= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \\
&= (1-x) \sum_{n=0}^{N} s_n x^n + (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} s_n x^n.
\end{aligned}$$

$|x| < 1$ で, 十分大きい M に対し, $\frac{|1-x|}{1-|x|} < M$ であるように $x \to 1$ とすると,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| &\le \lim_{x\to 1}|1-x|\sum_{n=N+1}|s_n||x|^n \\ &\le \varepsilon\frac{|1-x|}{1-|x|} \\ &\le \varepsilon M.\end{aligned}$$

ε は任意だったから, 定理が成り立つ. □

上の定理のように, $\frac{|1-x|}{1-|x|}$ が有界であるように 1 に近づくことを, Stolz の角の中から 1 に近づくという. 特に実数上で $x < 1$ の方から, $x \to 1$ とするとき, この条件を満たす. 上の定理の収束半径が 1 で 1 に近づく, という仮定は強いように思えるかもしれないが, 実際には $x \to \alpha x, \alpha \in \mathbb{C}$ と置換することで, 任意の収束半径とその収束半径と同じ絶対値を持つ値に近づくときにも使えるのである.

2 初等関数

この節では, 初等関数を級数により導入する. 級数展開自体を初等関数の定義としていくことで, 比較的容易に様々な命題を示すことができるのである. ただし, 積分を用いないという方針のため, $\ln x, \arcsin x, \arctan x$ の級数展開は後の節にまわすことにした.

2.1 多項式

ここでは, 基本的な多項式に関する定理を証明する. 具体的な多項式列については後に扱う.

Definition 2.1 (多項式)**.** $a_k \in \mathbb{C}, k = 0, \ldots, n$ とする.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

の形の級数を多項式という.

Definition 2.2 (二項係数)**.** 非負整数 n, k に対し,

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

と二項係数を定義する. また, $k < 0$ または $n < k$ のとき 0 とする.

定義より, 二項係数は漸化式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

を満たすことが分かる.

Theorem 2.3 (二項定理)**.** 非負整数 n と複素数 x, y に対し,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

が成り立つ. 特に $y = 1$ として,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

が成り立つ.

Proof. 数学的帰納法により示す. $n = 0$ のとき明らか. $n \geq 1$ とする. $n-1$ のとき成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) x^k y^{n-k}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

であるから, 定理を得る. □

上の定理に関して, よく知られた組合せ論な証明を与えることもできるが, それは割愛する.

2.2 幾何級数

次は最も基本的な級数である.

Theorem 2.4. 複素数 $x \neq 1$ と, 任意の非負整数 n に対し,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

が成り立つ.

Proof.

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(x^k - x^{k+1}) \\ &= 1 - x^n\end{aligned}$$

の両辺を $1-x$ で割ればよい. □

これを用いて, 以下の定理を得る.

Theorem 2.5. 複素数 $|x| < 1$ に対し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

が成り立つ.

Proof. Theorem 2.4 において, $n \to \infty$ とすると,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

□

ここにおいて, 左辺は $x = -1$ では収束しないが, 右辺は $x = -1$ で $\frac{1}{2}$ になる. よって, 正の方向から x を -1 に近づけると

$$\lim_{x\to -1} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{x\to -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$$

が成り立つ. これによって, 発散級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

に $\frac{1}{2}$ という意味のある値を与えることができる. このように, べき級数が $x=a$ で発散していても $x\to a$ が存在するとき, その値を与えることを Abel 総和法という.

Theorem 2.6 (負の二項定理)**.** 複素数 $|x|<1$ と非負整数 n に対し,

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

が成り立つ.

Proof. 数学的帰納法により示す. $n=0$ のとき明らか. $n\leq 1$ とする. $n-1$ のとき成り立つと仮定すると, Theorem 2.5 より,

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n}&=\frac{1}{1-x}\cdot(1-x)^{-(n-1)}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}x^j\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-2}{k}x^k\\&=\sum_{0\leq j,k}\binom{n+k-2}{k}x^{j+k}\\&=\sum_{r=0}^{\infty}x^r\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k-2}{k}.\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k-2}{k}&=\sum_{k=0}^{r}\left(\binom{n+k-1}{k}-\binom{n+k-2}{k-1}\right)\\&=\binom{n+r-1}{r}\end{aligned}$$

より定理が示された. □

さて, ここで新たな記号を導入する.

Definition 2.7 (Pochhammer 記号)**.** 複素数 a と自然数 n に対して $(a)_n$ を

$$(a)_0=1,\quad (a)_n=\prod_{k=0}^{n-1}(a+k),\quad (a)_{-n}=\frac{(-1)^n}{(1-a)_n}$$

と定める.

この記号を用いることにより,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = (-1)^k\frac{(-n)_k}{k!}$$
$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

というようになる. よって, 二項定理と負の二項定理をまとめて, n を整数として,

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n)_k}{k!}x^k$$

と統一的に表せることが分かる. この n を複素数に一般化したものを一般二項定理といい, 後に示す.

2.3 有理関数

有理関数とは, 多項式の比で表される関数のことである. 有理関数に対し, 部分分数分解は級数においてはよく用いられる方法であるが, 一般に分母の一次式への因数分解には代数学の基本定理を要する. それはここでは分解できるものと仮定することにする.

Theorem 2.8. $a_1,\ldots,a_r$ を相異なる複素数とし, $f(x)$ を任意の多項式とする. このとき, 有理関数

$$\frac{f(x)}{(x+a_1)^{n_1}\cdots(x+a_r)^{n_r}}$$

は以下の形に部分分数分解される.

$$r(x) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{b_{i,j}}{(x+a_i)^j}.$$

ここで, $r(x)$ は多項式で, $b_{i,j}$ は定数である.

Proof. $r>1$ のとき,

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)} = \frac{1}{a_2-a_1}\left(\frac{1}{x+a_1}-\frac{1}{x+a_2}\right)$$

により, 分母の次数を 1 減らすことができる. これを繰り返すことにより, $r=1$ の場合に帰着する. よって,

$$\frac{f(x)}{(x+a)^n}$$

について上の形に帰着されることを示せばよい. $y=x+a$ と置くと, $f(x)=f(y-a)$ であり, これは y の多項式であるから, 多項式 $r(y)$ と定数 b_i により,,

$$\frac{f(y-a)}{y^n}=r(y)+\sum_{i=0}^{n}\frac{b_i}{y^i}$$

という形で表せる. □

部分分数分解は特に以下の形が有用である.

Theorem 2.9. 相異なる複素数 $a_1,\dots,a_r$ に対し,

$$\frac{1}{(x+a_1)\cdots(x+a_r)}=\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{x+a_i}\prod_{\substack{0\le j\le r\\ j\ne i}}\frac{1}{a_j-a_i}$$

が成り立つ.

Proof. Theorem 2.8 より,

$$\frac{1}{(x+a_1)\cdots(x+a_r)}=\frac{b_1}{x+a_1}+\cdots+\frac{b_r}{x+a_r}$$

となるような, $b_1,\dots,b_r$ が存在する. 両辺に $x+a_i$ をかけると,

$$\prod_{\substack{0\le j\le r\\ j\ne i}}\frac{1}{x+a_j}=b_i+(x+a_i)\left(\sum_{\substack{0\le j\le r\\ j\ne i}}\frac{b_j}{x+a_j}\right),$$

ここで, $x\to -a_i$ とすると,

$$\prod_{\substack{0\le j\le r\\ j\ne i}}\frac{1}{a_j-a_i}=b_i$$

より, 定理が示された. □

2.4 指数関数

指数関数には様々な定義があるが, ここでは扱いやすさのため, 級数により定義することにする.

Definition 2.10. 指数関数を以下のべき級数により, 定義する.

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

これは収束半径が ∞ なので, 複素平面全域で定義できる. 特に $e = e^1$ と定義する.

指数関数は以下で定義されることもある.

Proposition 2.11. 以下の等式が成り立つ.

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{n^k} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

より, $n \to \infty$ とすればよい. □

Theorem 2.12 (指数関数の加法定理)**.** 任意の $x, y \in \mathbb{C}$ に対し,

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

が成り立つ.

Proof. 二項定理より, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
e^x \cdot e^y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \\
&= \sum_{0 \leq n,m} \frac{x^n y^m}{n! m!} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} x^n y^{r-n} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x+y)^r}{r!} \\
&= e^{x+y}
\end{aligned}$$

□

これによって, 特に整数 n に対し, $(e^x)^n = e^{nx}$ が成り立つことが分かる. また, $e^x = 0$ となるような x が存在すると, 恒等的に 0 になってしまうので, そのような x は存在しないことが分かる. これは実数においては, 常に正であることを意味する. 次に, 重要な性質を示す.

Proposition 2.13. x を実数としたとき,

$$|e^{ix}| = 1$$

が成り立つ.

Proof. 前定理より,

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot e^{-ix} = 1$$

であることから従う. □

これにより, 指数関数の絶対値が, 純虚数においては, 1 であるので, $x = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ に対し, 以下のような計算ができる.

$$|e^{a+bi}| = |e^a||e^{bi}| = e^a$$

Theorem 2.14 (指数関数の周期性)**.** 以下が成り立つ.

(i) $e^{ix} = -1$ となる最小の $x > 0$ が存在する. それを π と定義する.

(ii) 任意の $x \in \mathbb{C}$ に対し, $e^{x+\pi i} = -e^x$.

(iii) $e^x = 1$ の解全体は $\{2\pi in; n \in \mathbb{Z}\}$ で尽くされる.

Proof. まず (i) を示す. $2^{2n}/(2n)!$ は $0 < n$ のとき単調減少であることが,

$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{2}{n(2n+1)} \frac{2^{2n}}{(2n)!} < \frac{2^{2n}}{(2n)!}$$

より分かる. よって, e^{2i} の実部は,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} < 0$$

だから, $e^0 = 1$ であることと e^x の連続性より, $e^{ia} = i$ または $e^{ia} = -i$ となる $0 < a < 2$ が存在する. このとき, $b = 2a$ とすれば,

$$e^{ib} = e^{ia} \cdot e^{ia} = -1$$

である. よって, $e^{ix} = -1$ となる $x > 0$ が存在し, e^{ix} は $0 < x$ が 0 に十分近いところで虚部が 0 でないことにより, その中で最小のものがとれる. それを π とすればよい.

(ii) を示す. 指数関数の加法定理より,

$$e^{x+\pi i} = e^x \cdot e^{\pi i} = -e^x.$$

(iii) を示す. e^x はその表示から, $0 \leq x$ のとき狭義単調増加である. また, $x \leq 0$ のときも $(e^x)^{-1} = e^{-x}$ だから, 狭義単調増加よって特に $e^x = 1$ の解は実数上で $x = 0$ のみである. x, y を実数として, $e^{x+yi} = 1$ のとき, $x = 0$ であることを示せば, (ii) と合わせて定理を得るが, これは

$$1 = |e^{x+yi}| = e^x$$

であることにより従う. □

一般に任意の $x \in \mathbb{C}$ に対し, $f(x + \alpha) = f(x)$ を満たす関数を周期関数といい, $\alpha > 0$ が最小のとき, その周期という. e^{ix} は周期 2π の周期関数である.

上の定理より, $e^{2\pi ik/n}, k = 0, \ldots, n-1$ は全て異なるので, これらが $x^n = 1$ の n 個の解を与える.

2.5 三角関数

三角関数も指数関数と同様にべき級数により導入するが, 指数関数がべき級数により定義されているので, 直接指数関数により定義しても同じことである.

Definition 2.15. $x \in \mathbb{C}$ において, 三角関数を以下のべき級数により定義する.

$$\begin{aligned}
\sin x &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
\cos x &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
\tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\cot x &:= \frac{\cos x}{\sin x}.
\end{aligned}$$

$\sin x, \cos x$ の収束半径は ∞ である.

Theorem 2.16 (Euler の公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Proof. 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&= \cos x + i \sin x.
\end{aligned}$$

□

これより, 三角関数の指数関数による表示,

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}
\end{aligned}$$

を得る. これより, $\sin x$ の零点全体の集合は

$$e^{ix} - e^{-ix} = 0$$

を解いて, $\{\pi n; n \in \mathbb{Z}\}$ であり,

$\cos x$ の零点全体の集合は

$$e^{ix} + e^{-ix} = 0$$

を解いて, $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}\right\}$ である

Proposition 2.17. $\sin \pi = 0, \cos \pi = -1$ が成り立つ.

Proof. $e^{i\pi} = -1$ の実部, 虚部を考えればよい. □

Theorem 2.18 (三角関数の加法定理)**.** $x, y \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

Proof. x, y のべき級数として, 一致の定理より, x, y が実数の場合に示せば十分である.

$$\begin{aligned}&\cos(x+y) + i\sin(x+y) \\ &= e^{i(x+y)} \\ &= e^{ix} \cdot e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y).\end{aligned}$$

この実部, 虚部を比較すればよい. □

特に, $x = y$ として, 以下の倍角公式を得る.

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x.\end{aligned}$$

また, $\cos x$ の加法定理において, $x = -y$ とすることで,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

が得られる. これを書き直すと,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

となる. これもよく用いられる.

Theorem 2.19 (倍角公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\sin nx &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin^k x \cos^{n-k} x \sin \frac{\pi k}{2} \\ \cos nx &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin^k x \cos^{n-k} x \cos \frac{\pi k}{2}.\end{aligned}$$

Proof. x を実数として示せば十分.

$$\begin{aligned}\cos nx + i\sin nx &= (\cos x + i\sin x)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k x \cos^{n-k} x \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin^k x \cos^{n-k} x \left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}\right)\end{aligned}$$

の実部, 虚部を比較すればよい. □

Theorem 2.20 (三角関数の周期性)**.** 任意の $x \in \mathbb{C}$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\sin(x+\pi) &= -\sin x \\ \cos(x+\pi) &= -\cos x \\ \tan(x+\pi) &= \tan x \\ \cot(x+\pi) &= \cot x.\end{aligned}$$

Proof. 加法定理より,

$$\begin{aligned}\sin(x+\pi) &= \sin x\cos\pi + \cos x\sin\pi = -\sin x \\ \cos(x+\pi) &= \cos x\cos\pi - \sin x\sin\pi = -\cos x.\end{aligned}$$

下 2 つは, $\sin x, \cos x$ の周期性から従う. □

$\tan x, \cot x$ の加法定理は $\sin x, \cos x$ の加法定理から導出することができる.

Theorem 2.21 (加法定理)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y} \\ \cot(x+y) &= \frac{\cot x\cot y - 1}{\cot x + \cot y}.\end{aligned}$$

Proof. $\sin x, \cos x$ の加法定理より,

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}, \\ \cot(x+y) &= \frac{\cos x\cos y - \sin x\sin y}{\sin x\cos y + \cos x\sin y} \\ &= \frac{\cot x\cot y - 1}{\cot x + \cot y}.\end{aligned}$$

$\square$

Theorem 2.22 (乗法公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$\sin nx = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{\pi k}{n}\right).$$

Proof. 因数分解

$$1 - x^n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - xe^{2\pi ik/n})$$

において, $x \to e^{-2ix}$ として,

$$1 - e^{-2inx} = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - e^{-2i(x+\pi k/n)})$$

を得る. ここで

$$1 - e^{-2inx} = 2ie^{-inx} \sin nx$$

であり, また

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} (1 - e^{-2i(x+\pi k/n)}) &= \prod_{k=0}^{n-1} 2ie^{-i(x+\pi k/n)} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{\pi k}{n}\right) \\ &= (2i)^n e^{-inx - i(n-1)/2} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{\pi k}{n}\right) \\ &= 2^n ie^{-inx} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{\pi k}{n}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\sin nx = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{\pi k}{n}\right)$$

$\square$

$1 - x^n$ の因数分解という, よく知られた式がこのような美しい乗法公式と同値であることは非常に興味深いと思う.

三角関数に似たような性質を持つ関数として, 以下の双曲線関数がある.

Definition 2.23. $x \in \mathbb{C}$ において, 双曲線関数を以下のように定義する.

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

三角関数と全く同様に以下のように級数展開できるが, これは簡単なので省略する.

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

2.6 対数関数

指数関数は実数上で狭義単調増加なので, 実関数として逆関数が考えられる. これも級数として導入することもできるが, やはり逆関数であるということが重要だと感じたので, それを定義にすることにした.

Definition 2.24. $0 < x$ に対し, $e^y = x$ を満たす $y \in \mathbb{R}$ が一意に存在し, $\ln x$ と表す. 負の実数ではない任意の 0 でない複素数 x は $x = |x|e^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi$ と一意的に表されるので, $\arg x := \theta$ と定義する. そのときの対数関数の値を $\ln x := \ln |x| + i \arg x$ と定義する. これにより, 対数関数の引数が負の実数と 0 である場合を除き, $e^{\ln x} = \ln e^x = x$ が成り立つことが分かる.

この関数の級数展開は形式的べき級数論を用いて, 次の節に示すことにする.

Proposition 2.25. $0 < x, y$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

Proof.

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

において, $x \to \ln x, y \to \ln y$ として,

$$xy = e^{\ln x + \ln y}.$$

つまり,

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

□

一般に, $\ln xy = \ln x + \ln y$ は成り立たないことに注意する必要があるが, 成り立たない場合は $2\pi i$ の差が現れることが上の命題と, $\ln x$ の定義より分かる.

Definition 2.26. $0 < a$ と複素数 x に対し,

$$a^x := e^{x \ln a}$$

と定義し, 根号を

$$\sqrt{x} := x^{1/2}$$

と定義する.

2.7 逆三角関数

三角関数も値域や定義域を制限することによって, 実関数として定義される. これに関しては級数展開を得ることはその定義からはそれほど容易ではないが, 後に超幾何級数を用いて級数展開を得る.

Definition 2.27. 逆三角関数を以下のように定義する.

(i) $\arcsin x := -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2})$

(ii) $\arctan x := \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)$

このように定義された逆三角関数は, 実数 $|x| < \frac{\pi}{2}$ に対し,

$$\begin{aligned}\arcsin \sin x &= -i \ln(i \sin x + \sqrt{1-\sin^2 x}) \\ &= -i \ln e^{ix} \\ &= x.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\arctan \tan x &= \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1-i\tan x}{1-i\tan x}\right) \\ &= \frac{i}{2} \ln e^{-2ix} \\ &= x\end{aligned}$$

となることが分かるので, 実関数としての逆関数を定めることが分かる.

Theorem 2.28 (加法定理)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$
$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}.$$

Proof. 三角関数の加法定理,

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

より得られる. □

上の定理で特に $\arctan x$ の加法定理は比較的単純なので, それを用いた級数が数多く存在する. いくつか行列式を前提知識として仮定する.

3 形式的べき級数

3.1 形式的べき級数環

形式的べき級数環は代数的に環になっているのであるが, ここでは特に環の知識を仮定しない.

Definition 3.1. 複素数を係数とする多項式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

全体を多項式環といい, $\mathbb{C}[x]$ と表す.

Definition 3.2. 複素数を係数とする収束性を無視した形式的なべき級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

を形式的べき級数という. その全体を形式的べき級数環といい, $\mathbb{C}[[x]]$ と表す. a_0 を定数項という. $a_r = [x^r]f$ と表す.

多項式環は形式的べき級数環に含まれる．形式的べき級数同士の積を

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

と定める．

Theorem 3.3. 以下が成り立つ．

(i) 定数項が 0 でなければ, 形式的べき級数 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が逆元を持つ．つまり, $f(x)g(x) = 1$ となる $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ が存在する．これを $f(x)^{-1}$ と表す．

(ii) b_r は以下で与えられる．

$$b_r = \frac{(-1)^r}{a_0^{r+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & a_r \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{r-2} & a_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Proof. (i) 任意の r に対し, $a_0 \neq 0$ より, 以下の $b_k, k = 0, \dots, r$ に対する方程式が一意に解をもつことより従う．

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_r \\ 0 & a_0 & \dots & a_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_r \\ b_{r-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) 上の方程式に Cramer の公式を用いればよい． $\square$

Theorem 3.4. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ の合成を

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x)^n$$

と定める．このとき,

$$[x^r](f \circ g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\substack{0 \leq i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \dots + i_n = r}} b_{i_1} \cdots b_{i_n}$$

が成り立つ．

Proof.
$$[x^r](g^n) = \sum_{\substack{0 \le i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \cdots + i_n = r}} b_{i_1} \cdots b_{i_n}$$
であることから得られる. □

g の定数項が 0 のときは合成はその係数が有限和になるので, 必ず存在する. しかし, 一般には無限和となるため, 係数が発散することもあり, 存在するとは限らないことに注意する必要がある.

3.2 形式的 Laurant 級数体

Definition 3.5. 負べきの項が有限個であるような複素係数の級数,
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$$
を形式的 Laurant 級数といい, その全体を形式的 Laurant 級数体といい, $\mathbb{C}((x))$ と表す.

形式的 Laurant 級数は, 定数項が 0 でない $g(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ の元を用いて, $f(x) = x^n g(x)$ と一意に表せる. このとき, $\mathrm{ord}(f) := n$ と定義する. これより, 0 でない $\mathbb{C}((x))$ の元は逆元を持つ.

Definition 3.6 (形式的微分)**.** $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$ に対し, 形式的微分 D を以下で定義する.
$$D\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$
これを f' とも表す. r 階形式的微分を
$$f^{(r)} := \underbrace{D \cdots D}_{r} f$$
と定める. 以下, 微分と言えば形式的微分を意味するものとする.

$e^x, \sin x, \cos x$ は形式的べき級数とみなすことができるので, その微分を考えることができる.

Example 3.7. 以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= e^x \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x.
\end{aligned}
$$

これは簡単な計算により示されるので証明は省略する.

Proposition 3.8. 以下が成り立つ.

(i) $(fg)' = f'g + fg'$.
(ii) $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

Proof. (i) 形式的微分の線形性により, 単項式について示せば十分である.

$$(x^{n+m})' = (n+m)x^{n+m-1} = x^n(x^m)' + (x^n)'x^m$$

より成り立つ.

(ii) を示す. これも f が単項式の場合を示せば十分である. $g \neq 0$ としてよい. (i) において, $f = g^{-1}$ として,

$$0 = g'g^{-1} + g(g^{-1})'$$

だから,

$$(g^{-1})' = -\frac{g'}{g^2}.$$

ここで, 非負整数に対し, (i) を帰納的に用いて,

$$(g^n)' = ng^{n-1}g'$$

が得られるので, 任意の整数 n に対し,

$$(g^n)' = ng^{n-1}g'$$

が成り立つ. □

上の (i) を繰り返し用いると, Leibniz の公式

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を得る. また, $f = e^g$ が成り立っているとき, この両辺を微分すると,

$$f' = e^g g' = fg'$$

つまり,

$$\frac{f'}{f} = g'$$

が得られる. これは重要である.

作用素の形式的べき級数を

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n\right) f = a_0 f + a_1 Df + a_2 D^2 f + \cdots$$

のように定める.

a が複素数のとき, x についての形式的べき級数 $f(x+a)$ が存在するとは限らない. 例えば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^n = 1 + (1+x) + (1+2x+x^2) + \cdots$$

の場合. 定数項が発散し, 形式的べき級数を定めない. しかし, 存在する場合は以下のように展開できる.

Theorem 3.9. 形式的べき級数 $f(x)$ に対し, $f(x+a)$ が存在するならば,

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$$

が成り立つ.

Proof. $f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ として, 両辺を r 階形式的微分して,

$$f^{(r)}(x+a) = \sum_{n=r}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r}.$$

ここで, べき級数の定数項は x に 0 を代入することで

$$f^{(r)}(a) = r! a_r$$

が得られる. □

これは a に関しても形式的べき級数とすれば常に成り立つ.

Definition 3.10 (形式的留数)**.** $\mathrm{Res}(f)$ を f の x^{-1} の係数とする.

定義より, $[x^n]f(x) = \mathrm{Res}(x^{-n-1}f(x)), \mathrm{Res}(f') = 0$ であることが分かる.

Theorem 3.11. $\mathrm{Res}((f \circ g)g') = \mathrm{ord}(g)\,\mathrm{Res}(f)$ が成り立つ.

Proof. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$ とする.

$$\begin{aligned} f(g(x))g'(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(x)^n g'(x) \\ &= \mathrm{Res}(f)\frac{g'(x)}{g(x)} + \sum_{n \neq -1} \frac{a_n}{n+1}(g(x)^{n+1})'. \end{aligned}$$

よって,

$$\mathrm{Res}((f \circ g)g') = \mathrm{Res}(f)\,\mathrm{Res}\,\frac{g'}{g}.$$

ここで, $n = \mathrm{ord}(g)$ として,

$$\mathrm{Res}\,\frac{g'}{g} = \mathrm{Res}\,\frac{nb_n x^{n-1} + (n+1)b_{n+1}x^n + \cdots}{b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots} = N$$

より定理が示された. □

3.3 Lagrange 反転公式

Theorem 3.12 (合成逆元の存在性)**.** $f \in \mathbb{C}[[x]]$ を $\mathrm{ord}(f) = 1$ の形式的べき級数とする. このとき, $g \in \mathbb{C}[[x]]$ で $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ を満たすものが存在する (id は $\mathrm{id}(x) = x$ を表す). これを f の合成逆元といい, $\mathrm{inv}(f)$ で表す.

Proof. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ とする. Theorem 3.4 により,

$$\delta_{r,1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{\substack{0 < i_1, \ldots, i_n \\ i_1 + \cdots + i_n = r}} a_{i_1} \cdots a_{i_n}$$

が $b_k, k = 1, 2, \ldots$ に対して解ければよいが, これは

$$\begin{pmatrix} a_1^r & & & & \\ & a_1^{r-1} & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_1^2 & \\ & & & & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_r \\ b_{r-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができ, $a_1 \neq 0$ により, この方程式が解けることから従う. $\square$

Theorem 3.13 (Lagrange 反転公式)**.** $f \in \mathbb{C}[[x]]$ を $\mathrm{ord}(f) = 1$ の形式的べき級数とする. このとき, $0 < n, m$ に対し,

$$n[x^n](\mathrm{inv}(f)^m) = m[x^{-m}](f^{-n})$$

が成り立つ.

Proof. Theorem 3.11 を用いて, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
n[x^n](g^m) &= n \operatorname{Res}(x^{-n-1} g^m) \\
&= n \operatorname{Res}(\mathrm{id}^m f^{-n-1} f') \\
&= -\operatorname{Res}((\mathrm{id}^m f^{-n})') + m \operatorname{Res}(\mathrm{id}^{m-1} f^{-n}) \\
&= m[x^{-m}](f^{-n}).
\end{aligned}$$

$\square$

特に $m = 1$ として,

$$[x^n](\mathrm{inv}(f)) = \frac{1}{n} \operatorname{Res}(f^{-n})$$

によって, 合成逆元の係数を求めることができる.

Theorem 3.14. 形式的べき級数として, $1 - e^{-x}$ の合成逆元を $-\ln(1-x)$ と定義する. このとき,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

が成り立つ.

Proof. Lagrange 反転公式に $f = 1 - e^{-x}$ として,

$$[x^n](-\ln(1-x)) = \frac{1}{n} \operatorname{Res}\left((1-e^{-x})^{-n}\right)$$

ここで, 任意の自然数に対し,

$$\operatorname{Res}\left((1-e^{-x})^{-n}\right) = 1$$

を示せばよい. $n=1$ のとき明らか, $n>1$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\left((1-e^{-x})^{-n}\right)\\
&=\operatorname{Res}\left((1-e^{-x})^{-(n-1)}\right)-\frac{1}{n-1}\operatorname{Res}\left((1-e^{-t})^{-n}\right)'\\
&=\operatorname{Res}\left((1-e^{-x})^{-(n-1)}\right)
\end{aligned}$$

より, 帰納的に示される. □

形式的べき級数の等式が実数上でも成り立つためには, 収束性の議論をする必要がある. 級数,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

の収束半径は 1 であるから, 以下が成り立つ.

Corollary 3.15. $|x|<1$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Example 3.16 (Mercator 級数)**.** 上の定理で Abel の連続性定理を用いて, x を -1 に近づけると, 以下の等式が得られる.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$$

Theorem 3.17. $|x|\leq 1, x\neq \pm i$ に対し,

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

が成り立つ.

Proof. $-\ln(1-x)$ の級数展開を用いて, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}\arctan x &= \frac{i}{2}(\ln(1-ix)-\ln(1+ix)) \\ &= -i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

□

Example 3.18 (Leibniz 級数)**.** 特に $x=1$ として, 以下を得る.

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

上の級数により, π を数値計算することができるが, 収束速度が非常に遅いのでそれほど良い精度で値を得ることは容易ではない.

3.4 離散 Fourier 変換

Definition 3.19. 関数 $f(x)$ に対し,

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n-1}f(k)e^{-2\pi ikx/n}$$

を $F=\mathcal{F}_n(f)$ と表す. この f を F に移す $\mathcal{F}_n$ を離散 Fourier 変換という. また, 与えられた F に対し,

$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}F(k)e^{2\pi ikx/n}$$

となる f を与えることを逆離散 Fourier 変換という.

理論的にはそれぞれ,

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}f(k)e^{-2\pi ikx/n} \\ f(x)&=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}F(k)e^{2\pi ikx/n}\end{aligned}$$

のように係数を付けたほうが都合がよいかもしれないが, ここでは計算上の簡明さを重視することにするので, 係数を $1, \frac{1}{n}$ としたものを扱う.

Theorem 3.20. $F = \mathcal{F}_n(f)$ としたとき, $x = 0, 1, \ldots, n-1$ に対し,

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(k) e^{2\pi i k x/n}$$

が成り立つ.

Proof.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m k/n}$$

が m が n の倍数のときは 1, そうでないときは 0 となることに注意して,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(k) e^{2\pi i k x/n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k x/n} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) e^{-2\pi i j k/n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(j) \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i (x-j) k/n} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

□

一般に, 離散 Fourier 変換してから逆変換したものは, 元の関数に一致しないが, $x = 0, 1, \ldots, n-1$ の点では必ず一致するのである.

Definition 3.21. 関数 f, g は周期性 $f(x+n) = f(x), g(x+n) = g(x)$ を持つとする. それらの畳み込みを

$$(f * g)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(x-k)$$

により, 定義する.

Theorem 3.22. 関数 f, g は周期性 $f(x+n) = f(x), g(x+n) = g(x)$ を持つとする, このとき

$$\mathcal{F}_n(f * g) = \mathcal{F}_n(f)\mathcal{F}_n(g)$$

が成り立つ.

Proof. 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(f*g)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}(f*g)(k)e^{-2\pi ikx/n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi ikx/n}\sum_{j=0}^{n-1} f(j)g(k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} f(j)\sum_{k=-j}^{n-j-1} g(k)e^{-2\pi i(j+k)x/n} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} f(j)e^{-2\pi ijx/n}\sum_{k=0}^{n-1} g(k)e^{-2\pi ikx/n} \\
&= \mathcal{F}_n(f)(x)\mathcal{F}_n(g)(x).
\end{aligned}$$

□

以下の定理は応用範囲が広く, 重要である.

Theorem 3.23. 整数 a, b を $0 \le b < a$ を満たすものとする. 形式的べき級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

に対し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{an+b}x^{an+b} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1} f(xe^{2\pi ik/a})e^{-2\pi ibk/a}$$

が成り立つ.

Proof. 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1} f(xe^{2\pi ik/a})e^{-2\pi ibk/a} &= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1} e^{-2\pi ibk/a}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n e^{2\pi ink/a} \\
&= \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \sum_{k=0}^{a-1} e^{2\pi i(n-b)k/a} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{an+b}x^{an+b}.
\end{aligned}$$

□

右辺は $k \to a-k$ として,

$$\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1} f(xe^{-2\pi ik/a})e^{2\pi ibk/a}$$

としてもよい.

Example 3.24. Theorem 3.23 で $f(x)=e^x$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{an+b}}{(an+b)!} &= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1}\exp(xe^{2\pi ik/a})e^{-2\pi ibk/a}\\ &= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1}\exp\left(x\cos\left(\frac{2\pi k}{a}\right)+i\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{a}\right)-\frac{2\pi bk}{a}\right)\right)\end{aligned}$$

が得られ, x を実数として実部を考えると,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{an+b}}{(an+b)!} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1}\exp\left(x\cos\left(\frac{2\pi k}{a}\right)\right)\cos\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{a}\right)-\frac{2\pi bk}{a}\right)$$

を得ることができる.

Example 3.25. Theorem 3.23 で $f(x)=(1+x)^n$ とすると,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{ak+b}x^{ak+b} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1}(1+xe^{2\pi ik/a})^n e^{-2\pi ibk/a}$$

が成り立つ. ここで $x \to e^{ix}$ として,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{ak+b}e^{i(ak+b)x} &= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1}(1+e^{ix+2\pi ik/a})^n e^{-2\pi ibk/a}\\ &= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1}\left(2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi k}{a}\right)\right)^n e^{inx/2+\pi ink/a-2\pi ibk/a}.\end{aligned}$$

x を実数として実部, 虚部を考えて,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{ak+b}\cos(ak+b)x = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1}\left(2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi k}{a}\right)\right)^n\cos\left(\frac{nx}{2}+\frac{\pi nk-2\pi bk}{a}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{ak+b}\sin(ak+b)x = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1}\left(2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi k}{a}\right)\right)^n\sin\left(\frac{nx}{2}+\frac{\pi nk-2\pi bk}{a}\right)$$

を得ることができる.

3.5 差分作用素

Definition 3.26. 関数 f に対し, その前進差分を,

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

と定め, n 階差分を

$$\Delta^n f(x) = \underbrace{\Delta \ldots \Delta}_{n} f(x)$$

と定める.

Theorem 3.27. 以下の等式が成り立つ.

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k).$$

Proof. n に関する数学的帰納法で示す. $n=0$ のとき, 明らか. $n-1$ のとき成り立つと仮定する.

$$\begin{aligned}
\Delta^n f(x) &= \Delta \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n-1}{k} f(x+k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n-1}{k} f(x+k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n-1}{k} f(x+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) f(x+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k).
\end{aligned}$$

□

$x=0$ としたものを, 慣習として

$$\Delta^n f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

のように書くことがあるようだが, この記法は $f(0)$ という定数を差分しているように見えてあまり筆者は好みではないので, ここでは用いないことにする.

以下は非常に有用で美しい定理である.

Theorem 3.28 (Vandermonde の恒等式)**.** $b, c \in \mathbb{C}, c \neq 0, 1, 2, \ldots$ とする．このとき，以下の等式が成り立つ．

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}$$

Proof. m を整数として，m についての差分 Δ により，

$$\begin{aligned}
\Delta \frac{(b)_m}{(c)_m} &= \frac{(b)_{m+1}}{(c)_{m+1}} - \frac{(b)_m}{(c)_m} \\
&= \frac{b-c}{c} \frac{(b)_m}{(c+1)_m}.
\end{aligned}$$

これを繰り返し用いて，

$$\begin{aligned}
\Delta^n \frac{(b)_m}{(c)_m} &= \frac{(b-c)(b-c-1)\cdots(b-c-n+1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} \frac{(c)_m}{(b+n)_m} \\
&= \frac{(-1)^n (c-b)_n (c)_m}{(c)_{n+m}}
\end{aligned}$$

が得られる．ここで，Theorem 3.27 を用いると，

$$\frac{(-1)^n (c-b)_n (c)_m}{(c)_{n+m}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(b)_{m+k}}{(c)_{m+k}}.$$

ここで，$m = 0$ として，両辺に $(-1)^n$ をかけて定理を得る． □

この定理は，$b = x, c = 1 - n - y$ として少し書き換えることにより，

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k} = (x+y)_n$$

という形になり，二項定理の類似であると思える．

Theorem 3.29. 形式的べき級数 $f(x)$ で，$f(x+1)$ が存在するものに作用する作用素としての等式

$$e^D - 1 = \Delta$$

が成り立つ．

Proof. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とする．このとき，

$$e^D f(x) = f(x+1)$$

を示せばよい. これは, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
e^D f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n f(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} a_r r(r-1)\cdots(r-n+1)x^{r-n} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} a_r \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} x^{r-n} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} a_r (x+1)^r.
\end{aligned}$$

$\square$

これは非常に重要な定理である.

Example 3.30.

$$\begin{aligned}
D &= \ln(1+\Delta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n
\end{aligned}$$

と変形して用いることができ, Theorem 3.27 より, 形式的べき級数 $f(x)$ で $n > 0$ に対し,

$$f(x+n)$$

が全て存在する場合,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} f(x+k)$$

が得られることが期待される. しかし, これには x の形式的べき級数に展開したときの係数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} f^{(r)}(k)$$

が全て収束する必要があることに注意する必要がある.

また, 次のような形もある.

Example 3.31. 作用素

$$\frac{D}{1-e^D} = -\frac{\ln(1+\Delta)}{\Delta}$$

を $f(x)$ に作用させると, 左辺は

$$\begin{aligned}\frac{D}{1-e^D}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^D Df(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f'(n+x).\end{aligned}$$

一方, 右辺は

$$\begin{aligned}-\frac{\ln(1+\Delta)}{\Delta}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\Delta^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}f(x+k)\end{aligned}$$

となり, これらは係数がともに収束するとき, 一致するから,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'(n+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}f(x+k)$$

を得る.

上の例で, Bernoulli 数を用いて,

$$\frac{D}{1-e^D} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}D^n$$

と展開することにより, 形式的な Euler-Maclaurin の和公式を得ることができるが, ここでは用いないので割愛する.

4 多項式列

多項式列 $p_n(x)$ とは, $p_n(x)$ がちょうど n 次の多項式であるようなものである.

4.1 Stirling 数

Definition 4.1. n を非負整数とする．以下のように Stirling 数 $s_{n,k}, S_{n,k}$ を定義する．

$$
\begin{aligned}
(x)_n &= \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k \\
x^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} S_{n,k} (x)_k.
\end{aligned}
$$

$(x)_n$ の次数はちょうど n なので，上のような $s_{n,k}, S_{n,k}$ は一意に定まり，$s_{n,k}$ を第 1 種 Stirling 数，$S_{n,k}$ を第 2 種 Stirling 数という．上記の添え字の範囲外では 0 と定義する．

Proposition 4.2. 以下の漸化式が成り立つ．

(i) $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$.

(ii) $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.

Proof. (i) は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k &= (x)_n \\
&= (x+n-1)(x)_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}) x^k
\end{aligned}
$$

の x^k の係数を比較することにより得られる．(ii) は,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} S_{n,k} (x)_k &= x^n \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} S_{n-1,k} (x)_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k-1} S_{n-1,k} (x)_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k S_{n-1,k} (x)_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} (S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}) (x)_k
\end{aligned}
$$

の $(x)_k$ の係数を比較することにより得られる. $\square$

具体的な値はどのようになっているだろうか.

$$s_{n,0} = S_{n,0} = \delta_{n,0}, s_{n,1} = (n-1)!$$

などは定義から明らかである. また, Stirling 数には以下のような明示式がある.

Proposition 4.3. 以下の等式が成り立つ.

(i) $0 < n, 1 < k$ のとき,

$$s_{n,k} = (n-1)! \sum_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<n} \frac{1}{i_1 \cdots i_{k-1}}.$$

(ii) $0 \le n, k$ のとき,

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Proof. (i) は

$$\begin{aligned}(x)_n &= (n-1)! x \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{i}\right) \\ &= (n-1)! \left(x + \sum_{1<k}^{\infty} x^k \sum_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<n} \frac{1}{i_1 \cdots i_{k-1}} \right)\end{aligned}$$

より, (ii) は Δ を x に関する差分として,

$$\Delta (-1)^j (-x)_j = (-1)^j ((-x-1)_j - (-x)_j) = (-1)^{j-1} j (-x)_{j-1}.$$

これを繰り返し用いて,

$$\Delta^k (-1)^j (-x)_j = (-1)^{j-k} j(j-1) \cdots (j-k+1)(-x)_{j-k}$$

が得られるので,

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j S_{n,j} (-x)_j$$

の両辺に Δ^k を作用させて,

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (x+i)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-k} j(j-1) \cdots (j-k+1) S_{n,j} (-x)_{j-k}.$$

ここで, $x = 0$ として定理を得る. $\square$

Proposition 4.4. 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{0\le k\le n}\frac{S_{n,k}}{n!}s^nt^k=e^{t(e^s-1)}.$$

Proof. 以下の式変形により示される.

$$\begin{aligned}\sum_{0\le k\le n}\frac{S_{n,k}}{n!}s^nt^k&=\sum_{0\le k}\frac{t^k}{k!}\sum_{0\le n}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n\\&=\sum_{0\le k}\frac{t^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}e^{it}\\&=\sum_{0\le k}\frac{t^k}{k!}(e^s-1)^k\\&=e^{t(e^s-1)}.\end{aligned}$$

□

Theorem 4.5. $0\le n$ とする. 形式的べき級数環における作用素の間の等式

$$(xD)^n=\sum_{k=0}^{n}S_{n,k}x^kD^k$$

が成り立つ. ここで, D は x に関する微分作用素である.

Proof. 微分作用素の線形性より, $f(x)=x^m$ について示せば十分である. まず,

$$(xD)^n(x^m)=m^nx^m$$

である. 一方,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}S_{n,k}x^kD^k(x^m)&=x^m\sum_{k=0}^{n}(-1)^kS_{n,k}(-m)_k\\&=x^m(-1)^n(-m)^n\\&=m^nx^m\end{aligned}$$

であることから, 定理が示された. □

4.2 Bell 多項式

Definition 4.6. s, t に関する形式的べき級数により,

$$\exp\left(s\sum_{0<n} x_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{0\le k\le n} \frac{B_{n,k}(x_1,\ldots,x_{n-k+1})}{n!} s^k t^n$$

と定義する. また,

$$B_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(x_1,\ldots,x_{n-k+1})$$

を完全 Bell 多項式という.

定義から,

$$\exp\left(\sum_{0<n} x_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x_1,\ldots,x_n)}{n!} t^n$$

であることや,

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{0<n} x_n \frac{t^n}{n!}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{B_{n,k}(x_1,\ldots,x_{n-k+1})}{n!} t^n$$

が分かる.

Theorem 4.7. 以下の等式が成り立つ.

$$B_{n,k}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-k+1}) := n! \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{n-k+1}=k \\ i_1+2i_2+\cdots+(n-k+1)i_{n-k+1}=n}} \prod_{j=1}^{n-k+1} \frac{1}{i_j!}\left(\frac{x_j}{j!}\right)^{i_j}.$$

ここで, i_j は自然数とする. (以下しばらく i_j は自然数を表すものとする.)

Proof. n の k 個以上の自然数への分割には, $n-k+1$ より大きな数が現れないことに注

意して,

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(s\sum_{0<r}\frac{x_r}{r!}t^r\right)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}\left(\sum_{0<r}\frac{x_r}{r!}t^r\right)^k\\
&=\sum_{0\le k\le n}^{\infty} s^k t^n \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{n-k+1}=k\\ i_1+2i_2+\cdots+(n-k+1)i_{n-k+1}=n}} \prod_{j=1}^{n-k+1}\frac{1}{i_j!}\left(\frac{x_j}{j!}\right)^{i_j}
\end{aligned}
$$

より得られる. □

上の定理より, 特に

$$
B_n(x_1,\ldots,x_n)=n!\sum_{i_1+2i_2+\cdots+ni_n=n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{i_j!}\left(\frac{x_j}{j!}\right)^{i_j}
$$

が成り立つことが分かる.

Theorem 4.8 (Faà di Bruno の公式)**.** 自然数 n と形式的べき級数 $f(x), g(x)$ に対し,

$$
D^n(f(g(x)))=\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(g(x))B_{n,k}\left(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n-k+1)}(x)\right)
$$

が成り立つ.

Proof. x, t に関する形式的べき級数の間の等式

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D^n(f(g(x)))}{n!}t^n\\
&=f(g(x+t))\\
&=f\left(g(x)+\sum_{0<r}\frac{g^{(r)}(x)}{r!}t^n\right)\\
&=f(g(x))+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(g(x))}{k!}\left(\sum_{0<r}\frac{g^{(r)}(x)}{r!}t^r\right)^k\\
&=f(g(x))+\sum_{0<k\le n}^{\infty} f^{(k)}(g(x))B_{n,k}\left(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n-k+1)}(x)\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

における, t^n の係数を比較すれば良い. □

4.3 Touchard 多項式

Proposition 4.9. 以下の等式が成り立つ.

$$B_n(x,\dots,x)=\sum_{k=0}^{n}S_{n,k}x^k.$$

Proof. Proposition 4.4 より,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x,\dots,x)}{n!}t^n=e^{x(e^t-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}S_{n,k}x^k$$

であり, この t^n の係数を比較すればよい. □

Definition 4.10. 多項式 $T_n(x)$ を

$$T_n(x):=B_n(x,\dots,x)=\sum_{k=0}^{n}S_{n,k}x^k$$

と定義する. $T_n(x)$ を Touchard 多項式という.

これを用いて, Proposition 4.4 を書き直すと,

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)\frac{t^n}{n!}=e^{x(e^t-1)}$$

のようになる.

Theorem 4.11. 以下の等式が成り立つ.

$$e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}x^k=T_n(x).$$

Proof. 指数関数のべき級数展開

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=e^x$$

の両辺に $(xD)^n$ を作用させて, Theorem 4.5 を用いると,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}x^k=e^x\sum_{k=0}^{n}S_{n,k}x^k=e^xT_n(x)$$

となって, 定理が示される. □

Proposition 4.12. 以下の漸化式が成り立つ.

(i) $T_{n+1}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_k(x)$.

(ii) $T_{n+1}(x) = xT_n(x) + xT_n'(x)$.

Proof. (i) は以下のように示される.

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x) &= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{n+1}}{k!}x^k \\
&= xe^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^n}{k!}x^k \\
&= xe^{-x}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}\frac{k^j}{k!}x^k \\
&= x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}T_j(x).
\end{aligned}$$

(ii) は以下のように示される.

$$\begin{aligned}
xT_n'(x) &= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{n+1}}{k!}x^k - xe^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}x^k \\
&= T_{n+1}(x) - xT_n(x).
\end{aligned}$$

□

4.4 Bernoulli 多項式

Definition 4.13. $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ を複素数の組とする. t に関する形式的べき級数の係数として, 多重 Bernoulli 多項式を以下で定義し,

$$e^{xt}\prod_{i=1}^{r}\frac{t}{e^{a_i t}-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B_{r,n}(x;\boldsymbol{a})\frac{t^n}{n!}.$$

多重 Bernoulli 数を $B_{r,n}(\boldsymbol{a}) := B_{r,n}(0;\boldsymbol{a})$ とする. また, Bernoulli 多項式を $B_n(x) := B_{1,n}(x;1)$, Bernoulli 数を $B_n := B_n(0)$ と定義する.

Bell 多項式と記号が紛らわしいので, 文脈で判断することにする. 具体的な応用として, 前に得た式を多重 Bernoulli 数で書き表してみる.

Proposition 4.14. $(\{1\}^n) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$ を表すとする．このとき，

$$B_{n,n-1}(\{1\}^n) = (-1)^{n-1}$$

が成り立つ．

Proof. Theorem 3.14 の途中過程で用いた式，

$$\mathrm{Res}\left((1-e^{-t})^{-n}\right) = 1$$

を書き換えればよい． □

Proposition 4.15. $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ を複素数の組とする，このとき以下が成り立つ．

(i)
$$B_{r,n}(x;\boldsymbol{a}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{r,n-k}(\boldsymbol{a}) x^k.$$

(ii)
$$B_{r,n}(\boldsymbol{a}) = n! \sum_{\substack{0 \le i_1, \ldots, i_r \\ i_1 + \cdots + i_r = n}} \frac{B_{i_1} \cdots B_{i_r}}{i_1! \cdots i_r!} a_1^{i_1 - 1} \cdots a_r^{i_r - 1}.$$

Proof. (i) は以下の計算より従う．

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_{r,n}(x;\boldsymbol{a}) \frac{t^n}{n!} &= e^{xt} \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{t}{e^{a_i t} - 1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} B_{r,n}(\boldsymbol{a}) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{r,n-k}(\boldsymbol{a}) x^k.
\end{aligned}$$

(ii) は以下の計算より従う.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_{r,n}(\boldsymbol{a})\frac{t^n}{n!} &= \prod_{i=1}^{r} \frac{t}{e^{a_i t}-1} \\
&= \frac{1}{a_1\cdots a_r}\prod_{i=1}^{r}\frac{a_i t}{e^{a_i t}-1} \\
&= \frac{1}{a_1\cdots a_r}\prod_{i=1}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(a_i t)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\cdot n! \sum_{\substack{0\le i_1,\dots,i_r \\ i_1+\cdots+i_r=n}} \frac{B_{i_1}\cdots B_{i_r}}{i_1!\cdots i_r!} a_1^{i_1-1}\cdots a_r^{i_r-1}.
\end{aligned}
$$

□

つまり, Bernoulli 数が計算できれば, 多重 Bernoulli 数も計算できる.

以下, Bernoulli 数の計算方法を与える.

Definition 4.16. Bernoulli 数は以下の漸化式を満たす.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k = \delta_{n,1}.$$

Proof. 形式的べき級数の間の等式,

$$(e^t-1)\cdot\frac{t}{e^t-1} = t$$

の係数を考えることで得られる. □

$$\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2} = \frac{t(e^{t/2}+e^{-t/2})}{2(e^{t/2}-e^{-t/2})}$$

は偶関数なので, 3 以上の奇数に対して, Bernoulli 数は 0 に等しい. 上の漸化式を用いることによって,

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 1 \\
B_0 + 2B_1 &= 0 \\
B_0 + 3B_1 + 3B_2 &= 0 \\
B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 5B_4 &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

から順に $B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_4=-\frac{1}{30}, B_6=\frac{1}{42}, B_8=-\frac{1}{30},\dots$ と求まる．これらを用いて, Bernoulli 多項式を計算すると,

$$
\begin{aligned}
B_0(x) &= 1 \\
B_1(x) &= x-\frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2-x+\frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x \\
B_4(x) &= x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30} \\
B_5(x) &= x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x
\end{aligned}
$$

のようになる．

Theorem 4.17. 以下の等式が成り立つ．

$$B_r(x)=\sum_{0<n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(x+k)^r.$$

Proof. t の形式的べき級数として,

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_r}{r!}t^r &= \frac{t}{e^t-1} \\
&= \frac{\ln(1+(e^t-1))}{e^t-1} \\
&= \sum_{0<n}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(e^t-1)^{n-1} \\
&= \sum_{0<n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}e^{kt} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\sum_{0<n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}k^r
\end{aligned}
$$

の係数比較により,

$$B_r=\sum_{0<n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}k^r$$

が得られるから, これを用いて以下の計算により示される.

$$
\begin{aligned}
B_r(x) &= \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} B_j x^{r-j} \\
&= \sum_{0<n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} k^j x^{r-j} \\
&= \sum_{0<n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (x+k)^r.
\end{aligned}
$$

□

Bernoulli 多項式の直接的な応用として, 次の自然数和を求める公式がある.

Theorem 4.18 (Faulhaber の公式)**.** 任意の自然数 n, r に対し,

$$
\sum_{k=0}^{n-1} k^{r-1} = \frac{B_r(n) - B_r}{r}
$$

が成り立つ.

Proof. 形式的べき級数の間の等式,

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} k^{r-1}}{(r-1)!} t^r &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} t^r \\
&= t \sum_{k=0}^{n-1} e^{kt} \\
&= t \frac{e^{nt} - 1}{e^t - 1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_r(n) - B_r}{r!} t^r
\end{aligned}
$$

より従う. □

具体例で計算してみる. $r=5$ として, 自然数の 4 乗和が,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} k^4 &= \frac{B_5(n)-B_5}{5} \\ &= \frac{6n^5-15n^4+10n^3-n}{30} \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}\end{aligned}$$

のように求められる. 同じことを多重ベルヌーイ多項式でやってみると次のようになる.

Theorem 4.19. $s \leq r$ とする. このとき, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{0 \leq k_i < n_i} (a_1 k_1 + \cdots + a_s k_s)^{r-s} = \frac{(r-s)!}{r!} \sum_{S \subset \{1,\ldots,s\}} (-1)^{s-|S|} B_{r,s}\left(\sum_{i \in S} n_i a_i; \boldsymbol{a}\right)$$

ここで, $|S|$ は集合 S の要素数を表すとする.

Proof. 式変形により,

$$\begin{aligned}&\sum_{s \leq r} \frac{\sum_{0 \leq k_i < n_i} (a_1 k_1 + \cdots + a_s k_s)^{r-s}}{(r-s)!} t^r \\ &= t^s \sum_{0 \leq k_i < n_i} \sum_{0 \leq r} \frac{(a_1 k_1 + \cdots + a_s k_s)^r}{r!} t^r \\ &= t^s \sum_{0 \leq k_i < n_i} e^{(a_1 k_1 + \cdots + a_s k_s)t} \\ &= t^s \prod_{i=1}^{s} \frac{e^{n_i a_i t}-1}{e^{a_i t}-1} \\ &= \prod_{i=1}^{s} \frac{t}{e^{a_i t}-1} \sum_{S \subset \{1,\ldots,s\}} (-1)^{s-|S|} \exp\left(t \sum_{i \in S} n_i a_i\right) \\ &= \sum_{S \subset \{1,\ldots,s\}} (-1)^{s-|S|} \sum_{0 \leq r} \frac{B_{r,s}\left(\sum_{i \in S} n_i a_i; \alpha\right)}{r!} t^r\end{aligned}$$

の t^r の係数を比較すればよい. $\square$

Theorem 4.20. 形式的 Laurant 級数として, 以下の等式が成り立つ.

(i)

$$\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

(ii)

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

(iii)

$$\frac{1}{\sin x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2^{2n-1}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

これで三角関数でまだべき級数展開が得られていないのは, $\frac{1}{\cos x}$ の展開のみになったが, これは以下のように定義される, Euler 数で表すことができる.

Definition 4.21. 形式的べき級数の係数として, Euler 数 E_n を

$$\frac{1}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n$$

と定義する. 左辺が偶関数であるから, n が奇数のとき, $E_n = 0$ である.

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cosh ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

となることが分かる. 次に, E_n を計算する方法を与える.

Theorem 4.22. 以下の漸化式が成り立つ.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} E_{2k} = \delta_{n,0}.$$

Proof. 形式的べき級数の間の等式,

$$\cosh x \cdot \frac{1}{\cosh x} = 1$$

より得られる. □

この漸化式より, E_n は全て整数になることが分かる. これを用いて順番に計算していくと, $E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, E_8 = 1385, \ldots$ となる.

4.5 Chebyshev 多項式

Definition 4.23. 非負整数 n に対し,

$$T_n(\cos x) := \cos nx$$

$$U_{n-1}(\cos x) := \frac{\sin nx}{\sin x}$$

と定義すると, $T_n(x), U_n(x)$ はともに n 次の多項式となり, $T_n(x)$ を第 1 種 Chebyshev 多項式, $U_n(x)$ を第 2 種 Chebyshev 多項式という.

$$T_n(\cos x) = \cos nx$$

の両辺を微分すると,

$$T_n'(\cos x)\sin x = n\sin nx.$$

つまり, $T_n'(x) = nU_{n-1}(x)$ が得られる.

Proposition 4.24. t に関する形式的べき級数として, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = \frac{1}{1-2tx+t^2}.$$

Proof. 1 つ目の等式は以下の計算により得られる.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} T_n(\cos x)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos nx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n(e^{inx} + e^{-inx}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-te^{ix}} + \frac{1}{1-te^{-ix}}\right) \\
&= \frac{1-t\cos x}{(1-te^{ix})(1-te^{-ix})} \\
&= \frac{1-t\cos x}{1-2t\cos x+t^2}.
\end{aligned}$$

2 つ目の等式は以下の計算により得られる.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\cos x)t^n &= \frac{1}{\sin x}\sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin(n+1)x \\ &= \frac{1}{2i\sin x}\sum_{n=0}^{\infty} t^n(e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x}) \\ &= \frac{1}{2i\sin x}\left(\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}} - \frac{e^{-ix}}{1-te^{-ix}}\right) \\ &= \frac{1}{2i\sin x}\frac{2i\sin x}{1-2t\cos x+t^2} \\ &= \frac{1}{1-2t\cos x+t^2}.\end{aligned}$$

□

上の母関数表示より

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n &= (1-tx)\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(U_n(x) - xU_{n-1}(x))t^n.\end{aligned}$$

だから, $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$ であることが分かる.

4.6 Eulerian 多項式

Definition 4.25. 多項式列 $A_n(x;\alpha)$ を t に関する形式的べき級数により,

$$\frac{(1-x)e^{(1-x)\alpha t}}{1-xe^{(1-x)t}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x;\alpha)\frac{t^n}{n!}$$

として定義し, $A_n(x) := A_n(x;1)$ とする. $A_n(x)$ を Eulerian 多項式という.

Theorem 4.26. x についての形式的べき級数としての等式,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)^n x^k = \frac{A_n(x;\alpha)}{(1-x)^{n+1}}$$

が成り立つ.

Proof. 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x;\alpha)}{(1-x)^{n+1}} \frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{\alpha t}}{1-xe^t} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{(k+\alpha)t} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{n=0}^{\infty} (k+\alpha)^n \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)^n x^k}{n!} t^n.
\end{aligned}$$

□

これより, $A_0(x) = \frac{1}{x}$ となり, これは多項式ではないことに注意する必要がある. また, $n > 0$ のとき, $A_n(x;0) = xA_n(x)$ であることもこの漸化式から分かる.

Proposition 4.27. 以下の漸化式が成り立つ.

$$A_{n+1}(x;\alpha) = (\alpha + (n-\alpha+1)x)A_n(x;\alpha) + x(1-x)A_n'(x;\alpha).$$

ただし, 微分は x に関するものとする.

Proof. D を x に関する微分とする. $xD+\alpha$ を作用させて,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)^{n+1} x^k &= (xD+\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)^n x^k \\
&= (xD+\alpha) \left(\frac{A_n(x;\alpha)}{(1-x)^{n+1}} \right) \\
&= \frac{x(1-x)A_n'(x;\alpha) + (n+1)xA_n(x;\alpha) + \alpha(1-x)A_n(x;\alpha)}{(1-x)^{n+2}} \\
&= \frac{(\alpha + (n-\alpha+1)x)A_n(x;\alpha) + x(1-x)A_n'(x;\alpha)}{(1-x)^{n+2}}
\end{aligned}$$

であることから得られる. □

特に, $\alpha = 1$ として,

$$A_{n+1}(x) = (1+nx)A_n(x) + x(1-x)A_n'(x)$$

を得る. 上の命題において, $x = 1$ とすると,

$$A_{n+1}(1;\alpha) = A_n(1;\alpha)$$

が得られるが, $A_0(1;\alpha) = 1$ なので, $A_n(1;\alpha) = n!$ を得る.

上の漸化式で, $A_0(x) = \frac{1}{x}$ を用いると, $A_1(x) = 1$ が得られ, 以下, 帰納的に $A_n(x)$ が $n-1$ の多項式であることが分かる.

Proposition 4.28. 以下の等式が成り立つ.

$$A_n(x;\alpha) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1-\alpha)^k(1-x)^k A_{n-k}(x).$$

Proof. 次のように変形する.

$$\begin{aligned}\frac{A_n(x;\alpha)}{(1-x)^{n+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)^n x^k \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(1-\alpha)^j\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{n-j}x^k \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(1-\alpha)^j\frac{A_{n-j}(x)}{(1-x)^{n-j+1}}.\end{aligned}$$

ここで, 両辺に $(1-x)^{n+1}$ を掛ければよい. □

Theorem 4.29. 以下の等式が成り立つ.

$$x^n A_n\left(\frac{1}{x};\alpha\right) = A_n(x;1-\alpha).$$

Proof. 以下の等式の t^n の係数を比較すればよい.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{1}{x},\alpha\right)\frac{(xt)^n}{n!} &= \frac{(x-1)e^{(1-1/x)\alpha xt}}{x-e^{(1-1/x)xt}} \\ &= \frac{(1-x)e^{(x-1)\alpha t}}{e^{(x-1)t}-x} \\ &= \frac{(1-x)e^{(1-x)(1-\alpha)t}}{1-xe^{(1-x)t}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,1-\alpha)}{n!}t^n.\end{aligned}$$

□

特に $\alpha = 1$ として, 以下の系を得る.

Corollary 4.30. $n > 0$ のとき,

$$x^{n-1} A_n\left(\frac{1}{x}\right) = A_n(x)$$

が成り立つ.

n 次の多項式が $f(x)$ が

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

であるとき, 回文多項式であるという. 上の系より, $A_n(x)$ は $n > 0$ のとき, $n-1$ 次の回文多項式となることが分かる.

Proposition 4.31. 自然数 n に対し,

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k! S_{n,k} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

が成り立つ.

Proof. 幾何級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

の両辺に $(xD)^n$ を作用させて, Theorem 4.5 より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k &= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^k D^k\left(\frac{1}{1-x}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} k! S_{n,k} \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\end{aligned}$$

が得られる. 一方,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k = \frac{xA_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

であるから, これらを比較すればよい. □

5　無限乗積

5.1　無限乗積の収束性

まず, 収束性に関して基本的な以下の定理を示しておく.

Theorem 5.1. a_n を正の実数からなる数列とする．無限乗積

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$$

が収束することは, 無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

が収束することと同値である.

Proof.

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n < \prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$$

は積を展開すれば明らか．逆は不等式 $1+x<e^x$ より,

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) < \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)$$

となることから定理が示される. □

5.2 三角関数の無限乗積展開

Theorem 5.2 ($\sin\pi x$ の無限乗積展開)**.**

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Proof. 定義より, 第 2 種 Chebyshev 多項式 $U_{2n}(x)$ は偶関数である．よって,

$$\frac{U_{2n}(\cos x)}{2n+1} = \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\sin x}$$

を $\sin x$ の多項式として表すことができる．それを $f_n(x)$ とおく．つまり,

$$f_n(\sin x) := \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\sin x}$$

である．$f_n(x)$ の零点は $x=\sin\frac{\pi k}{2n+1}, k=\pm1,\dots,\pm n$ にあるから, $x\to 0$ のとき 1 となることを考慮して,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{\sin\frac{\pi k}{2n+1}}\right)\left(1+\frac{x}{\sin\frac{\pi k}{2n+1}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right). \end{aligned}$$

ここで, $x\to\sin\frac{\pi x}{2n+1}$ とする．示すべきことはべき級数に関する等式であるから, x を十分小さくとっても一般性を失わない.

$$\begin{aligned} \frac{\sin\pi x}{(2n+1)\sin\frac{\pi x}{2n+1}} &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad (n\to\infty) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

ここで, $n\to\infty$ として定理を得る. □

5.3 ガンマ関数

Definition 5.3. $x\in\mathbb{C}-\{0,-1,-2,\dots\}$ に対し, ガンマ関数を以下の極限で定義する.

$$\Gamma(x) := \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{(x)_{n+1}}$$

また, 負の整数に対しては, $\Gamma(x)=\infty$ と定める.

Theorem 5.4. $x\in\mathbb{C}$ において, 以下の等式が成り立つ.

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

Proof. 以下の計算により従う.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{x+1}}{(1+x)_{n+1}} \\ &= x\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+x+1}\frac{n!n^x}{(x)_{n+1}} \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

$\square$

定義より, $\Gamma(1) = 1$ であることから, 帰納的に $\Gamma(n+1) = n!$ であることがわかる. つまりガンマ関数は階乗の一般化である.

Definition 5.5. 自然数 n に対し, 調和数 H_n を

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

と定義する.

Theorem 5.6. 極限

$$\lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n)$$

は収束する. この値を Euler の定数といい γ で表す.

Proof. 以下のような和を考える.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{rk^r} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{k^r} \\ &= H_n - 1 - \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r}(\zeta_n(r) - 1).\end{aligned}$$

ここで, $\zeta_n(r) := \sum_{k=1}^{n} k^{-r}$ とおいた. 一方,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) \\ &= \ln(n+1) - \ln 2\end{aligned}$$

だから,

$$\lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = 1 - \ln 2 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r}(\zeta(r) - 1)$$

であり, 最後の和は $\zeta(r) - 1$ が 2^{-r} 程度の速度で減少するので, 収束する. $\square$

Theorem 5.7 (Weierstrass の乗積表示)**.** $x \in \mathbb{C}$ において, 以下の等式が成り立つ.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}.$$

Proof. Theorem 5.6 により,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(x)_{n+1}}{n!n^x} \\ &= x \lim_{n\to\infty} n^{-x} e^{\sum_{k=1}^{n} x/k} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k} \\ &= xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k}.\end{aligned}$$

□

Theorem 5.8. $|x| < 1$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\ln \Gamma(1-x) = \gamma x + \sum_{1<n} \frac{\zeta(n)}{n} x^n.$$

Proof. Weierstrass の乗積表示より,

$$\Gamma(1-x) = e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-1} e^{-x/n}$$

両辺の対数と考えて, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}\ln \Gamma(1-x) &= \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x}{n} - \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{1<k} \frac{x^k}{kn^k} \\ &= \gamma x + \sum_{1<k} \frac{x^k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\ &= \gamma x + \sum_{1<k} \frac{x^k}{k} \zeta(k).\end{aligned}$$

□

Example 5.9. Abel の連続性定理より, $x \to -1$ とすると, 左辺は 0 になり, 以下の等式を得る.

$$\sum_{1<n} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) = \gamma.$$

Theorem 5.10 (相反公式)**.** $x \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

が成り立つ.

Proof. Weierstrass の乗積表示より,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &= xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \cdot e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{x/n} \\
&= x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{\sin \pi x}{\pi}.
\end{aligned}$$

最後の変形には $\sin \pi x$ の無限乗積展開を用いた. □

特に, $x = \frac{1}{2}$ として,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

であるが, 定義より, $0 < \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ なので,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

を得る.

5.4 ディガンマ関数

さて, Theorem 5.8 により, 形式的べき級数としてのガンマ関数の表示

$$\Gamma(1-x) = \exp\left(\gamma x + \sum_{1<n} \frac{\zeta(n)}{n} x^n\right)$$

が得られる. よって, その微分について,

$$-\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = \gamma + \sum_{1<n} \zeta(n) x^{n-1}$$

が成り立つ．この右辺は

$$\begin{aligned}\sum_{1<n}\zeta(n)x^{n-1} &= \sum_{1<n}x^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1<n}\frac{x^{n-1}}{k^n}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(k-x)}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-x}-\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

であることにより，

$$\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-x}\right)$$

が得られる．これを以下で関数として定義する．

Definition 5.11. ディガンマ関数 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) := -\gamma + \sum_{n=1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x-1}\right)$$

と定義する．

先ほどの式は

$$-\psi(1-x) = \gamma + \sum_{1<n}\zeta(n)x^{n-1}$$

と表される．このべき級数の収束半径は 1 である．

Proposition 5.12. 以下の等式が成り立つ．

$$\psi(x+1) = \frac{1}{x} + \psi(x).$$

Proof. 以下の計算による．

$$\begin{aligned}\gamma + \psi(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x-1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x-1}-\frac{1}{n+x}\right)\\ &= \gamma + \psi(x) + \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

$\square$

Theorem 5.13 (相反公式)**.** $|x| < 1$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\psi(1-x) - \psi(x) = \pi \cot \pi x.$$

Proof. 形式的べき級数としての等式,

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)\Gamma(1+x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

の微分により,

$$\psi(1-x) - \psi(1+x) = \pi \cot \pi x - \frac{1}{x}$$

が得られる. その収束半径は 1 なので, $|x| < 1$ において等式が成り立ち,

$$\psi(x+1) = \frac{1}{x} + \psi(x)$$

を用いて定理を得る. $\square$

この公式は, 実際には任意の複素数で成立する.

Theorem 5.14 (三角関数の部分分数展開)**.** 形式的べき級数として, 以下の等式が成り立つ.

(i)

$$\pi \cot \pi x = x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}.$$

(ii)

$$\pi \tan \pi x = x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - x^2}.$$

(iii)

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}.$$

(iv)

$$\frac{\pi}{\cos \pi x} = x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - x^2}.$$

Proof. x として複素数を十分小さくとって示せば十分である. (i) は, 相反公式を用いて, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
\pi \cot \pi x &= \psi(1-x) - \psi(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-x} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x-1} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x-1} - \frac{1}{n-x} \right) \\
&= \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} \\
&= x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}.
\end{aligned}$$

(ii) は (i) を用いて,

$$\begin{aligned}
\pi \tan \pi x &= \left(x + \frac{1}{2} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{n - \frac{1}{2} - x} - \frac{1}{n + \frac{1}{2} + x} \right) \\
&= x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - x^2}.
\end{aligned}$$

(iii) は (i),(ii) を用いて,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin \pi x} &= \frac{\pi}{2} \left(\cot \frac{\pi x}{2} + \tan \frac{\pi x}{2} \right) \\
&= \frac{x}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2} \right)^2 - n^2} - \frac{1}{\left(\frac{x}{2} \right)^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2} \right) \\
&= x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2 - (2n)^2} - \frac{1}{x^2 - (2n+1)^2} \right) \\
&= x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}.
\end{aligned}$$

(iv) は (i) から (ii) を示したときと全く同様である. □

以下の定理はディガンマ関数の有理数での値の明示公式である.

Theorem 5.15 (Gauss の定理)**.** 整数 $0 < a < b$ に対し,

$$\psi\left(\frac{a}{b}\right) = -\gamma - \ln 2b - \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi a}{b} + \sum_{k=1}^{b-1}\cos\frac{2\pi ak}{b}\ln\sin\frac{\pi k}{b}.$$

Proof. 以下のように変形する.

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{a}{b}\right) + \gamma &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\frac{a}{b}}\right) \\
&= \lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{b(n+1)}}{n+1} - \frac{x^{bn+a}}{n+\frac{a}{b}}\right) \\
&= \lim_{x\to 1}\left(-\ln(1-x^b) - b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{bn+a}}{bn+a}\right).
\end{aligned}$$

ただし, $|x| < 1$ であるようにして, $x \to 1$ と近づくとする. ここで, Theorem 3.23 より,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{bn+a}}{bn+a} = -\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1}e^{2\pi iak/b}\ln(1-xe^{-2\pi ik})$$

であるから, これを代入して,

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{a}{b}\right) + \gamma &= \lim_{x\to 1}\left(-\ln(1-x^b) + \sum_{k=0}^{b-1}e^{2\pi iak/b}\ln(1-xe^{-2\pi ik/b})\right) \\
&= -\ln b + \sum_{k=1}^{b-1}e^{2\pi iak/b}\ln(1-e^{-2\pi ik/b}) \\
&= -\ln b + \sum_{k=1}^{b-1}e^{2\pi iak/b}\left(\ln\sin\frac{\pi k}{b} + \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{b}\right)\right) \\
&= -\ln 2b - \frac{\pi i}{2} + \sum_{k=1}^{b-1}e^{2\pi iak/b}\ln\sin\frac{\pi k}{b} - \frac{\pi i}{b}\sum_{k=1}^{b-1}ke^{2\pi iak/b}
\end{aligned}$$

が得られる. ここで,

$$\sum_{k=1}^{n-1}kx^k = xD\frac{1-x^n}{1-x} = -\frac{nx^n}{1-x} + \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}$$

より,

$$\sum_{k=1}^{b-1}ke^{2\pi iak/b} = -\frac{b}{1-e^{2\pi ia/b}} = \frac{be^{-\pi ia/b}}{2i\sin\frac{\pi a}{b}}$$

であるから,

$$\psi\left(\frac{a}{b}\right)+\gamma=-\ln 2b-\frac{\pi i}{2}+\sum_{k=1}^{b-1}e^{2\pi iak/b}\ln\sin\frac{\pi k}{b}-\frac{\pi e^{-\pi ia/b}}{2\sin\frac{\pi a}{b}}$$

が得られ, この両辺の実部を考えて定理を得る. $\square$

6 超幾何級数

6.1 一般二項定理

Theorem 6.1. $|x|<1$ と $a\in\mathbb{C}$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$(1-x)^{-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}x^n.$$

Proof. 形式的べき級数 $(1-x)^{-a}:=e^{-a\ln(1-x)}$ の微分は,

$$\begin{aligned}((1-x)^{-a})'&=(1-x)^{-a}(-a\ln(1-x))'\\&=a(1-x)^{-a-1}\end{aligned}$$

これを繰り返し用いて,

$$\begin{aligned}((1-x)^{-a})^{(n)}&=a(a+1)\cdots(a+n-1)(1-x)^{-a-n}\\&=(a)_n(1-x)^{-a-n}\end{aligned}$$

よって, Theorem 3.9 より,

$$(1-x)^{-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}x^n$$

a が負整数のときは多項式, そうでないとき, このべき級数の収束半径は, 1 であるから, $|x|<1$ において,

$$(1-x)^{-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}x^n$$

が成り立つ. $\square$

ここで, 超幾何級数を導入する.

Definition 6.2. $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1$ に対し,

$$ {}_rF_s \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} ; x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r)_n}{(b_1, \dots, b_s)_n n!} x^n $$

と定義する. ここで, $(a_1, \dots, a_r)_n := (a_1)_n \cdots (a_r)_n$ とする.

これにより, 一般二項定理は,

$$ {}_1F_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ; x \right] = (1-x)^{-a} $$

と表すことができ, Vandermonde の恒等式は,

$$ {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b, -n \\ c \end{matrix} ; 1 \right] = \frac{(c-b)_n}{(c)_n} $$

と表すことができる.

Theorem 6.3 (Pfaff の変換公式)**.** $|x| < 1, \mathrm{Re}(x) < \frac{1}{2}$ のとき,

$$ {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right] = (1-x)^{-a} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} ; \frac{x}{x-1} \right]. $$

Proof. 一般二項定理を用いて,

$$ \begin{aligned} &(1-x)^{-a} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} ; \frac{x}{x-1} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a, c-b)_n}{(c)_n n!} x^n (1-x)^{-n-a} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a, c-b)_n}{(c)_n n!} x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+n)_k}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a)_{n+k} (c-b)_n}{(c)_n n! k!} x^{n+k} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r}{r!} x^r \sum_{n=0}^{r} (-1)^n \binom{r}{n} \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \quad n+k \to r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a, b)_r}{(c)_r r!} x^r. \end{aligned} $$

ただし, 最後の変形は Vandermonde の恒等式による. □

Theorem 6.4. $a \in \mathbb{C}$ と $|x| \leq 1$ に対し,

$$\begin{aligned}
\sin(a \arcsin x) &= ax\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; x^2\right]\\
\cos(a \arcsin x) &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}; x^2\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. 最初の式を示す. 一般二項定理より,

$$\begin{aligned}
\frac{(1-x)^{-a}-(1-x)^{-a}}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}\\
&= ax\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; x^2\right].
\end{aligned}$$

ここで, Pfaff の変換公式より,

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}, 1+\frac{a}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; x^2\right] = (1-x^2)^{-(1+a)/2}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; \frac{x^2}{x^2-1}\right]$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sinh\left(\frac{a}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) &= \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-a/2} - \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-a/2}}{2}\\
&= \frac{ax}{\sqrt{1-x^2}}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; \frac{x^2}{x^2-1}\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $x \to \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}$ として, 左辺は

$$\begin{aligned}
\sinh\left(\frac{a}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+ix}{\sqrt{1-x^2}-ix}\right)\right) &= \sinh\left(\frac{a}{2}\ln\left((\sqrt{1-x^2}+ix)^2\right)\right)\\
&= \sinh(ia \arcsin x)\\
&= i\sin(a \arcsin x)
\end{aligned}$$

一方, 右辺は

$$iax\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; x^2\right]$$

となるから, 最初の式が得られた. 2 つ目の式を示す.

$$\begin{aligned}\frac{(1-x)^{-a}+(1-x)^{-a}}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\\ &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}; x^2\right].\end{aligned}$$

ここで, Pfaff の変換公式より,

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}; x^2\right] = (1-x^2)^{-a/2}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}; \frac{x^2}{x^2-1}\right]$$

であるから

$$\begin{aligned}\cosh\left(\frac{a}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) &= \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-a/2}+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-a/2}}{2}\\ &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}; \frac{x^2}{x^2-1}\right].\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $x \to \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}$ として, 左辺は

$$\begin{aligned}\cosh\left(\frac{a}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+ix}{\sqrt{1-x^2}-ix}\right)\right) &= \cosh(ia\arcsin x)\\ &= \cos(a\arcsin x).\end{aligned}$$

一方, 右辺は

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}; x^2\right]$$

となるから定理が示された. □

Theorem 6.5. 自然数 r と $|x| \leq 1$ に対し,

$$\begin{aligned}\frac{(2\arcsin x)^{2r-1}}{(2r-1)!} &= \sum_{0\leq n_1<\cdots<n_r}\frac{\binom{2n_r}{n_r}}{2^{2n_r}\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(n_{r-1}+\frac{1}{2}\right)^2\left(n_r+\frac{1}{2}\right)}x^{2n_r+1}\\ \frac{(2\arcsin x)^{2r}}{(2r)!} &= \sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{2^{2n_r}}{n_1^2\cdots n_r^2\binom{2n_r}{n_r}}x^{2n_r}.\end{aligned}$$

Proof. 前の定理より,

$$\begin{aligned}\sin(2a\arcsin x) &= 2ax{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+a, \frac{1}{2}-a\\ \frac{3}{2}\end{matrix}; x^2\right]\\ &= 2a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+a, \frac{1}{2}-a\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!}x^{2n+1}\\ &= a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}\left(n+\frac{1}{2}\right)}x^{2n+1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{a^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right).\end{aligned}$$

この左辺の a^{2r-1} の係数は,

$$\frac{(-1)^{r-1}(2\arcsin x)^{2r-1}}{(2r-1)!}$$

であり, 右辺の a^{2r-1} の係数は,

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{a^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a^{2r}\sum_{0\le n_1<\cdots<n_r<n}\frac{1}{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(n_r+\frac{1}{2}\right)^2}$$

であることにより,

$$(-1)^{r-1}\sum_{0\le n_1<\cdots<n_r}\frac{\binom{2n_r}{n_r}}{2^{2n_r}\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(n_{r-1}+\frac{1}{2}\right)^2\left(n_r+\frac{1}{2}\right)}x^{2n_r+1}$$

に等しいことが分かる. よって最初の式が得られる. 2 つ目の式も同様に,

$$\begin{aligned}\cos(2a\arcsin x) &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}a, -a\\ \frac{1}{2}\end{matrix}; x^2\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,-a)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n n!}x^{2n}\\ &= 1+a^2\sum_{0<n}\frac{2^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}}x^{2n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{a^2}{k^2}\right)\end{aligned}$$

の a^{2r} の係数を比較すればよい. □

上の定理より, 特に

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n+1)}x^{2n+1}\\ \arcsin^2 x &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}}x^{2n}\end{aligned}$$

が得られる.

Theorem 6.6 (Euler の変換公式)**.** $|x| < 1$ に対し,

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right] = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1\left[\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; x\right]. $$

Proof. Pfaff の変換公式を 2 回用いて, $-1 < x < \frac{1}{2}$ のとき,

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right] &= (1-x)^{-a} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix}; \frac{x}{x-1}\right] \\ &= (1-x)^{-a}\left(1 - \frac{x}{x-1}\right)^{b-c} {}_2F_1\left[\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; x\right] \\ &= (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1\left[\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; x\right]. \end{aligned} $$

ここで, 両辺は $|x| < 1$ で収束するから, 一致の定理より, $|x| < 1$ で等式が成立する. □

以下の定理は非常に多くの応用があり, 重要である.

Theorem 6.7 (Saalschutz の定理)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, -n \\ c, 1-n+a+b-c \end{matrix}; 1\right] = \frac{(c-a, c-b)_n}{(c, c-a-b)_n}. $$

Proof. Euler の変換公式

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}; x\right] = (1-x)^{a+b-c} {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right] $$

の両辺の x^n の係数を比較すると,

$$ \begin{aligned} \frac{(c-a, c-b)_n}{(c)_n n!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a,b)_k}{(c)_k k!} \frac{(c-a-b)_{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{(c-a-b)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(a, b, -n)_k}{(c, 1-n+a+b-c)_k k!} \end{aligned} $$

より定理が得られる. □

6.2 Gauss の超幾何定理

次の定理は超幾何級数の特殊値の公式として最も基本的なものである.

Theorem 6.8 (Gauss の超幾何定理)**.** $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ のとき, 以下の等式が成り立つ.

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. $$

ここでは, [4] で述べられている証明を与える.

Proof. まず, 等式

$$ (c-a)(c-b){}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c+1\end{matrix};z\right]=c(c-a-b){}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right]+ab(1-z){}_2F_1\left[\begin{matrix}a+1,b+1\\c+1\end{matrix};z\right] $$

を示す. これは z^n の係数を考えると,

$$ \begin{aligned} &c(c-a-b)\frac{(a,b)_n}{(c)_n n!}+ab\frac{(a+1,b+1)_n}{(c+1)_n n!}-ab\frac{(a+1,b+1)_{n-1}}{(c+1)_{n-1}(n-1)!}\\ &=\frac{(a,b)_n}{(c+1)_n n!}((c-a-b)(c+n)+(a+n)(b+n)-n(c+n))\\ &=\frac{(a,b)_n}{(c+1)_n n!}(c-a)(c-b) \end{aligned} $$

であることから得られる. この等式において, $z\to 1$ とすることで,

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};1\right]=\frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c+1\end{matrix};1\right]. $$

これを n 回用いて,

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};1\right]=\frac{(c-a,c-b)_n}{(c,c-a-b)_n}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c+n\end{matrix};1\right]. $$

ここで, $n\to\infty$ とすることで,

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} $$

を得る. □

Corollary 6.9. 以下の等式が成り立つ.

$$ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_{2k}}{2^{2k}k!\left(x+\frac{1}{2}\right)_k}=\frac{2^n(x)_n}{(2x)_n}. $$

Proof. Gauss の超幾何定理より, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_{2k}}{2^{2k}k!\left(x+\frac{1}{2}\right)_k} &= {}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2}\\ x+\frac{1}{2}\end{matrix};1\right]\\ &= \frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma(x+n)}{\Gamma\left(x+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(x+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}\\ &= \frac{2^n\Gamma(2x)}{\Gamma(2x+n)}(x)_n\\ &= \frac{2^n(x)_n}{(2x)_n}.\end{aligned}$$

□

これは超幾何級数の変換公式を証明する際に用いられることがある.

6.3 二次の変換公式

Pfaff の変換公式は $x\to\frac{x}{x-1}$ という一次分数変換であるが, 特別な形の超幾何級数には二次の変換公式が存在する. ここではそれらのいくつかを示すことにする.

Theorem 6.10. 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ 2b\end{matrix};2x\right] &= (1-x)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\ \frac{1}{2}+b\end{matrix};\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]\\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ 2b\end{matrix};x\right] &= (1-x)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},b-\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}+b\end{matrix};\frac{x^2}{4(x-1)}\right].\end{aligned}$$

Proof. 最初の式は, Corollary 6.9 より, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b)_n}{(2b)_n n!}(2x)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}x^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_{2k}}{2^{2k}k!\left(b+\frac{1}{2}\right)_k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}k!\left(b+\frac{1}{2}\right)_k}\sum_{n=2k}^{\infty}\frac{(a)_n}{(n-2k)!}x^n\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_{2k}}{2^{2k}k!\left(b+\frac{1}{2}\right)_k}x^{2k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k)_n}{n}x^n\\ &= (1-x)^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\right)_k}{k!\left(b+\frac{1}{2}\right)_k}\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^k.\end{aligned}$$

2 つ目の式は, 最初の式に Pfaff の変換公式を用いることにより, 得られる.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\2b\end{matrix};x\right] &= \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};\frac{x^2}{(2-x)^2}\right]\\
&= (1-x)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},b-\frac{a}{2}\\\frac{1}{2}+b\end{matrix};\frac{x^2}{4(x-1)}\right].
\end{aligned}
$$

□

Theorem 6.11. 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};x\right] = (1-x)^{-a}{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};-\frac{4x}{(1-x)^2}\right].
$$

Proof. Saalschutz の和公式より,

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,a+n,-n\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};1\right] = \frac{(b,c)_n}{(1+a-b,1+a-c)_n}
$$

であるから, 以下の計算により示される.

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\1+a-b,1+a-c\end{matrix};x\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a-b-c,a+n,-n)_k}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1+a-b-c)_k}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(a)_{n+k}}{(n-k)!}x^n\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1+a-b-c)_k(a)_{2k}}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}x^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2k)_n}{n!}x^n\\
&= (1-x)^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1+a-b-c,\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\right)_k}{(1+a-b,1+a-c)_k k!}\left(-\frac{4x}{(1-x)^2}\right)^k.
\end{aligned}
$$

□

上の定理において, 特に $c=\frac{1+a}{2}$ として, 以下を得る. 2 つ目の式は 1 つ目の式に Pfaff の変換公式を適用すればよい.

Corollary 6.12. 以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\1+a-b\end{matrix};x\right] &= (1-x)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}-b\\1+a-b\end{matrix};-\frac{4x}{(1-x)^2}\right]\\
&= (1+x)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{a}{2},\frac{1+a}{2}\\1+a-b\end{matrix};\frac{4x}{(1+x)^2}\right]
\end{aligned}
$$

特に $b=0$ として, 以下の系を得る.

Corollary 6.13. 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, \frac{1}{2}+a \\ 1+2a \end{matrix}; x\right] = \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2a}
$$
$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, \frac{1}{2}+a \\ 2a \end{matrix}; x\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2a-1}.
$$

Corollary 6.14 (Kummer の定理)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ 1+a-b \end{matrix}; -1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}.
$$

Proof. Corollary 6.12 において, $x \to -1$ として以下の計算により示される.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ 1+a-b \end{matrix}; -1\right] &= 2^{-a}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{1+a}{2}-b \\ 1+a-b \end{matrix}; 1\right] \\
&= 2^{-a}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}.
\end{aligned}
$$

□

7 q 超幾何級数

q 類似とは, $q \to 1$ の極限で通常の対象に一致するような拡張である. 以下, $|q| < 1$ とする.

Definition 7.1. q 数, q 階乗, q 二項係数をそれぞれ以下のように定義する.

$$
[x] := \frac{1-q^x}{1-q}, \quad [n]! := \prod_{k=1}^{n}[k], \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.
$$

それぞれ $q \to 1$ の極限で通常の対象に一致することが確認できる.

7.1 q ガンマ関数

Definition 7.2. 非負整数 n に対し, q-Pochhammer 記号を以下のように定義する.

$$
(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), \quad (a;q)_{-n} := \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1-aq^{-k})}.
$$

また, $n=\infty$ に対しても

$$(a;q)_\infty := \prod_{n=0}^{\infty}(1-aq^n)$$

と定義する.

通常の Pochhammer 記号同様, $(a_1,\ldots,a_r;q)_n := (a_1;q)_n\cdots(a_r;q)_n$ とする.

Proposition 7.3. 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(a;q)_n &= (-a)^n q^{\binom{n}{2}}(q^{1-n}/a;q)_n \\
(a;q)_{-n} &= \frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q/a;q)_n} \\
(a;q)_{n+k} &= (a;q)_n(aq^n;q)_k \\
(a;q)_{n-k} &= \frac{(a;q)_n}{(q^{1-n}/a;q)_k}(-q/a)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \\
(q^{-n};q)_k &= \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk}.
\end{aligned}$$

証明は n,k の正負に応じて場合分けし, 計算するだけなので省略する.

Definition 7.4. q ガンマ関数を以下のように定義する.

$$\Gamma_q(x) := \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}.$$

これは x が負の整数または 0 でない場合に有限値をとる.

Proposition 7.5. 複素数 x に対し,

$$\Gamma_q(x+1) = [x]\Gamma_q(x)$$

が成り立つ.

Proof. 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(x+1) &= \frac{(q;q)_\infty}{(q^{x+1};q)_\infty}(1-q)^{-x} \\
&= \frac{1-q^x}{1-q}\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x} \\
&= [x]\Gamma_q(x).
\end{aligned}$$

□

しかし q ガンマ関数が $q \to 1$ の極限で通常のガンマ関数に一致していることはそれほど自明なことではないので, それを次に示す.

Proposition 7.6. 以下の等式が成り立つ.

$$\lim_{q\to 1}\Gamma_q(x)=\Gamma(x).$$

Proof. 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1}\Gamma_q(x)&=\lim_{q\to 1}\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}\\&=\lim_{q\to 1}\frac{1-q}{1-q^x}\frac{(q;q)_\infty}{(q^{1+x};q)_\infty}(1-q)^{-x}\\&=\frac{1}{x}\lim_{q\to 1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1-q^{n+x}}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^x.\end{aligned}$$

ここで, 定義域上で,

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{1-q^n}{1-q^{n+x}}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^x$$

はコンパクト一様収束であるから,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\lim_{q\to 1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1-q^{n+x}}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^x&=\frac{1}{x}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(\lim_{q\to 1}\frac{1-q^n}{1-q^{n+x}}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^x\right)\\&=\frac{1}{x}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{n}{n+x}\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{(N+1)^xN!}{\prod_{n=0}^{N}(n+x)}\\&=\Gamma(x)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

Theorem 7.7 (q-Gauss の乗法公式)**.** 複素数 x に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\Gamma_q(nx)\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma_{q^n}\left(\frac{k}{n}\right)=[n]^{nx-1}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

Proof. 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(nx)\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma_{q^n}\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{(q;q)_\infty}{(q^{nx};q)_\infty}(1-q)^{1-nx}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(q^n;q^n)_\infty}{(q^k;q^n)_\infty}(1-q^n)^{1-k/n} \\
&= \frac{(q;q)_\infty}{(q^{nx};q)_\infty}(1-q)^{1-nx}\frac{(q^n;q^n)_\infty^n}{(q;q)_\infty}(1-q^n)^{(n-1)/2} \\
&= \frac{(q^n;q^n)_\infty^n}{(q^{nx};q)_\infty}(1-q)^{1-nx}(1-q^n)^{(n-1)/2} \\
&= \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^{nx-1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(q^n;q^n)_\infty}{(q^{nx+k};q^n)_\infty}(1-q^n)^{1-z-k/n} \\
&= [n]^{nx-1}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma_{q^n}\left(x+\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}$$

□

Theorem 7.8 (Gauss の乗法公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2}n^{1/2-nx}\Gamma(nx).$$

Proof. q-Gauss の乗法公式において, $q \to 1$ とすると,

$$\Gamma(nx)\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = n^{nx-1}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

が得られる. よって

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}}$$

を示せばよい. 相反公式より,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) &= \left(\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right)\right)^{1/2} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi k}{n}}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

ここで, $\sin x$ の乗法公式

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{\pi k}{n}\right) = 2^{1-n}\sin nx$$

の両辺を $\sin x$ で割ってから, $x \to 0$ とすると,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n} = 2^{1-n} n$$

だから,

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi k}{n}}\right)^{1/2} = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}}$$

となって定理を得る. □

上の定理で特に $n=2$ の場合,

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

となる. これを Legendre の倍角公式といい, よく用いられる.

7.2 Heine の変換公式

以下, この節の中心となる q 超幾何級数を導入する.

Definition 7.9 (q 超幾何級数)**.** $|z|<1$ に対し, q 超幾何級数を

$${}_r\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};z\right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\dots,a_r;q)_n}{(b_1,\dots,b_s,q;q)_n}\left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{1+s-r} z^n$$

と定義する. 左辺に q が現れていないが, 特に明示する必要がある場合は

$${}_r\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};q;z\right]$$

のように表す.

以下のように極限をとることで, 古典的な超幾何級数に一致する.

$$\lim_{q\to 1} {}_r\phi_s\left[\begin{matrix}q^{a_1},\dots,q^{a_r}\\ q^{b_1},\dots,q^{b_s}\end{matrix};(1-q)^{1+s-r}z\right] = {}_rF_s\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};z\right].$$

また

$$\lim_{a\to\infty} \frac{(a;q)_n}{a^n} = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}$$

であることより,

$$\lim_{a\to\infty} {}_{r+1}\phi_s \left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r, a \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; \frac{x}{a}\right] = {}_r\phi_s \left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; x\right]$$

であることが分かる. これは重要である.

定義を終えたところで, 具体的な q 超幾何関数の関係式を示していきたいと思う.

Theorem 7.10 (q 二項定理)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$ {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; x\right] = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}.$$

Proof. まず,

$$\begin{aligned} {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; x\right] - {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; xq\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_{n-1}} x^n \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_{n+1}}{(q;q)_n} x^n \\ &= x {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; x\right] - ax {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; xq\right]. \end{aligned}$$

よって,

$$ {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; x\right] = \frac{1-ax}{1-x} {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; xq\right].$$

これを繰り返し用いて,

$$ {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; x\right] = \frac{(ax;q)_n}{(x;q)_n} {}_1\phi_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; xq^n\right].$$

ここで, $n \to \infty$ として定理を得る. □

これは一般二項定理

$$(1-x)^{-a} = {}_1F_0 \left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; x\right]$$

の q 類似である.

Heine の変換公式は, ${}_2\phi_1$ の q 超幾何級数における中心的な結果であり, 後に見るように様々な応用がある.

Theorem 7.11 (Heine の変換公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};x\right] &= \frac{(b,ax;q)_\infty}{(c,x;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,x\\ax\end{matrix};b\right] \\
&= \frac{(c/b,bx;q)_\infty}{(c,x;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}abx/c,b\\bx\end{matrix};\frac{c}{b}\right] \\
&= \frac{(abx/c;q)_\infty}{(x;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/a,c/b\\c\end{matrix};\frac{abx}{c}\right].
\end{aligned}
$$

Proof. 1 つ目の式は, q 二項定理より,

$$
\begin{aligned}
\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n} &= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\frac{(cq^n;q)_\infty}{(bq^n;q)_\infty} \\
&= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}b^k q^{nk}
\end{aligned}
$$

だから,

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};x\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n} \\
&= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}b^k q^{nk} \\
&= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}b^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n q^{nk} \\
&= \frac{(b,ax;q)_\infty}{(c,x;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}b^k\frac{(x;q)_k}{(ax;q)_k} \\
&= \frac{(b,ax;q)_\infty}{(c,x;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/b,x\\ax\end{matrix};b\right].
\end{aligned}
$$

他の 2 つは, 上の式を用いて,

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}x,c/b\\ax\end{matrix};b\right] &= \frac{(c/b,bx;q)_\infty}{(b,ax;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}abx/c,b\\bx\end{matrix};\frac{c}{b}\right] \\
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,abx/c\\bx\end{matrix};\frac{c}{b}\right] &= \frac{(c,abx/c;q)_\infty}{(c/b,bx;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/a,c/b\\c\end{matrix};\frac{abz}{c}\right]
\end{aligned}
$$

となることから得られる. □

最後の式は, Euler の変換公式

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};z\right] = (1-z)^{c-a-b}{}_2F_1\left[\begin{matrix}c-a,c-b\\c\end{matrix};z\right]
$$

の q 類似である．しかし，一般の Heine の変換公式には古典極限が存在しない．以下は Gauss の超幾何定理の q 類似であるが，Heine の変換公式はその一般化になっているのである．

Theorem 7.12 (Heine の和公式)**.** $\left|\frac{c}{ab}\right| < 1$ のとき，以下の等式が成り立つ．

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; \frac{c}{ab}\right] = \frac{(c/a, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; q)_\infty}.
$$

Proof. Heine の変換公式

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right] = \frac{(c/b, bx; q)_\infty}{(c, x; q)_\infty} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} abx/c, b \\ bx \end{matrix}; \frac{c}{b}\right]
$$

において，$x = \frac{c}{ab}$ として，

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; \frac{c}{ab}\right] = \frac{(c/a, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; q)_\infty}
$$

を得る． □

特に，$a, b \to \infty$ として，以下の等式を得る．

Corollary 7.13. 以下の等式が成り立つ．

$$
{}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ x \end{matrix}; x\right] = \frac{1}{(x; q)_\infty}.
$$

q 超幾何級数，

$$
{}_r\phi_s\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; x\right]
$$

は $a_1, \ldots, a_r$ のどれか 1 つが q^{-n} の形のとき，有限和になる．このとき，和の順番を逆から考えることで異なる等式が得られることがある，それを以下に示す．

Proposition 7.14. 以下の等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
{}_{r+1}\phi_s\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r, q^{-n} \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; x\right] &= \frac{(a_1, \ldots, a_r; q)_n}{(b_1, \ldots, b_s; q)_n}\left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{s-r-1}\left(\frac{x}{q}\right)^n \\
&\quad \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{1-n}/b_1, \ldots, q^{1-n}/b_s, q^{-n}; q)_k}{(q^{1-n}/a_1, \ldots, q^{1-n}/a_r, q; q)_k}\left(\frac{b_1 \cdots b_s q^{1+n}}{a_1 \cdots a_r x}\right)^k.
\end{aligned}
$$

Proof. 以下の計算により示される.

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r,q^{-n}\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};x\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1,\dots,a_r,q^{-n};q)_{n-k}}{(b_1,\dots,b_s,q;q)_{n-k}}\left((-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\right)^{s-r}x^{n-k}\\
&=\frac{(a_1,\dots,a_r,q^{-n};q)_n}{(b_1,\dots,b_s,q;q)_n}z^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{1-n}/b_1,\dots,q^{1-n}/b_s,q^{-n};q)_k}{(q^{1-n}/a_1,\dots,q^{1-n}/a_r,q;q)_k}\\
&\cdot\frac{\prod_{i=1}^{r}(-q/a_i)^kq^{\binom{k}{2}-nk}}{\prod_{i=1}^{s}(-q/b_i)^kq^{\binom{k}{2}-nk}}q^{(1+n)k}\left((-1)^{n-k}q^{\binom{n}{k}+\binom{k}{2}-nk+k}\right)^{s-r}x^{-k}\\
&=\frac{(a_1,\dots,a_r;q)_n}{(b_1,\dots,b_s;q)_n}\left((-1)^nq^{\binom{n}{2}}\right)^{s-r-1}\left(\frac{x}{q}\right)^n\\
&\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{1-n}/b_1,\dots,q^{1-n}/b_s,q^{-n};q)_k}{(q^{1-n}/a_1,\dots,q^{1-n}/a_r,q;q)_k}\left(\frac{b_1\cdots b_sq^{1+n}}{a_1\cdots a_rx}\right)^k.
\end{aligned}
$$

□

特に $r=s$ として, 以下を得る.

Corollary 7.15. 以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_r,q^{-n}\\ b_1,\dots,b_s\end{matrix};x\right]\\
&=\frac{(a_1,\dots,a_r;q)_n}{(b_1,\dots,b_s;q)_n}q^{-\binom{n}{2}}\left(-\frac{x}{q}\right)^n{}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}q^{1-n}/b_1,\dots,q^{1-n}/b_r,q^{-n}\\ q^{1-n}/a_1,\dots,q^{1-n}/a_r\end{matrix};\frac{b_1\cdots b_sq^{1+n}}{a_1\cdots a_rx}\right].
\end{aligned}
$$

これの具体的な応用として以下の定理が得られる.

Theorem 7.16 (q-Vandermonde の恒等式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\ c\end{matrix};\frac{cq^n}{b}\right]=\frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n}
$$

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\ c\end{matrix};q\right]=\frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n}b^n.
$$

Proof. 上の等式は Heine の和公式において, $a=q^{-n}$ とおけば,

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b,q^{-n}\\ c\end{matrix};\frac{cq^n}{b}\right]=\frac{(cq^n,c/b;q)_\infty}{(c,cq^n/b;q)_\infty}=\frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n}.
$$

となることから示される. 2 つ目の式は, Proposition 7.15 を用いて,

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}b, q^{-n}\\ c\end{matrix}; q\right] = (-1)^n\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}q^{-\binom{n}{2}}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{1-n}/c, q^{-n}\\ q^{1-n}/b\end{matrix}; \frac{cq^n}{b}\right]. $$

ここで, 最初の式を用いて,

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{1-n}/c, q^{-n}\\ q^{1-n}/b\end{matrix}; \frac{cq^n}{b}\right] &= \frac{(c/b;q)_n}{(bq^{1-n};q)_n} \\ &= (-b)^n q^{\binom{n}{2}}\frac{(c/b;q)_n}{(b;q)_n} \end{aligned} $$

であるから, これを代入して定理を得る. □

次に, これを用いて次の変換公式を示すことができる.

Theorem 7.17 (Jackson の変換公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}; x\right] = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a, c/b\\ c, ax\end{matrix}; bx\right]. $$

Proof. q-Vandermonde の恒等式を用いて, 以下の式変形により示される.

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}; x\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(c/b, q^{-n};q)_k}{(c,q;q)_k}b^kq^{nk} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(c,q;q)_k}b^k\sum_{n=k}\frac{(a;q)_n(q^{-n};q)_k}{(q;q)_n}x^nq^{nk} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_k}{(c,q;q)_k}q^{\binom{k}{2}}(-b)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_{n-k}}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,c/b;q)_k}{(c,q;q)_k}q^{\binom{k}{2}}(-bx)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(aq^k;q)_n}{(q;q)_n}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,c/b;q)_k}{(c,q;q)_k}q^{\binom{k}{2}}(-bx)^k\frac{(axq^k;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \\ &= \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}{}_2\phi_2\left[\begin{matrix}a, c/b\\ c, ax\end{matrix}; bx\right]. \end{aligned} $$

□

これは右辺が ${}_2\phi_2$ なので, どの式の q 類似になっているのかがそれほど明らかではないかもしれない. しかし,

$$ \lim_{q\to 1}(x;q)_n = (1-x)^n $$

に注意すれば, これは Pfaff の変換公式

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};x\right]=(1-x)^{-a}{}_2F_1\left[\begin{matrix}a,c-b\\c\end{matrix};\frac{x}{x-1}\right]
$$

の q 類似になっていることが分かる.

古典的な超幾何級数の場合と全く同様の手法で, 以下の定理を示すことができる.

Theorem 7.18 (q-Saalschutz の和公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_3\phi_2\left[\begin{matrix}a,b,q^{-n}\\c,abq^{1-n}/c\end{matrix};q\right]=\frac{(c/a,c/b;q)_n}{(c,c/ab;q)_n}.
$$

Proof. Heine の変換公式より,

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/a,c/b\\c\end{matrix};x\right]=\frac{(cx/ab;q)_\infty}{(x;q)_n}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};\frac{cx}{ab}\right]
$$

の両辺の係数を比較して,

$$
\begin{aligned}
\frac{(c/a,c/b;q)_n}{(c,q;q)_n}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,b;q)_k}{(c,q;q)_k}\left(\frac{c}{ab}\right)^k\frac{(c/ab;q)_{n-k}}{(q;q)_{n-k}}\\
&=\frac{(c/ab;q)_n}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(a,b,q^{-n};q)_k}{(c,abq^{1-n}/c,q;q)_k}q^k
\end{aligned}
$$

より示される. □

Theorem 7.19 (Bailey-Daum の和公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\aq/b\end{matrix};-\frac{q}{b}\right]=\frac{(-q;q)_\infty(aq,aq^2/b^2;q^2)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty}.
$$

Proof. Heine の変換公式より,

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,b\\aq/b\end{matrix};-\frac{q}{b}\right]&=\frac{(a,-q;q)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q/b,-q/b\\-q\end{matrix};a\right]\\
&=\frac{(a,-q;q)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q/b,-q/b;q)_n}{(q,-q;q)_n}a^n\\
&=\frac{(a,-q;q)_\infty}{(aq/b,-q/b;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^2/b^2;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}a^n.
\end{aligned}
$$

ここで, q 二項定理により,

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^2/b^2;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}a^n=\frac{(aq^2/b^2;q^2)_\infty}{(a;q^2)_\infty}
$$

であり, 後は

$$(a;q^2)_\infty = \frac{(a;q)_\infty}{(aq;q^2)_\infty}$$

を代入して定理を得る. □

Bailey-Daum の和公式は Kummer の定理

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ 1+a-b \end{matrix};-1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)}$$

の q 類似になっている. これはそれほど自明ではないが, 証明は割愛する.

7.3 Watson の変換公式

以下 [7] で述べられている証明に従って, Watson の変換公式を証明する. 次の展開公式が重要である.

Theorem 7.20 (展開公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&{}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix} a,b,c,a_1,\dots,a_r,q^{-n} \\ aq/b,aq/c,b_1,\dots,b_{r+1} \end{matrix};x\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(aq/bc,a_1,\dots,a_r,q^{-n};q)_k(a;q)_{2k}}{(aq/b,aq/c,b_1,\dots,b_{r+1},q;q)_k} q^{-\binom{k}{2}} \left(-\frac{bcx}{aq}\right)^k \\
&\cdot {}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix} aq^{2k},a_1q^k,\dots,a_rq^k,q^{k-n} \\ b_1q^k,\dots,b_{r+1}q^k \end{matrix};\frac{bcx}{aq^{1+k}}\right].
\end{aligned}$$

Proof. q-Saalschutz の和公式により,

$$\begin{aligned}
{}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc,aq^n,q^{-n} \\ aq/b,aq/c \end{matrix};q\right] &= \frac{(c,q^{1-n}/b;q)_n}{(aq/b,cq^{-n}/a;q)_n} \\
&= \frac{(b,c;q)_n}{(aq/b,aq/c;q)_n}\left(\frac{aq}{bc}\right)^n
\end{aligned}$$

だから,

$$\frac{(b,c;q)_n}{(aq/b,aq/c;q)_n} = \left(\frac{bc}{aq}\right)^n {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} aq/bc,aq^n,q^{-n} \\ aq/b,aq/c \end{matrix};q\right].$$

よって, 以下の計算により示される.

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix}a, b, c, a_1, \ldots, a_r, q^{-n}\\ aq/b, aq/c, b_1, \ldots, b_{r+1}\end{matrix}; x\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a, a_1, \ldots, a_r, q^{-n}; q)_k}{(b_1, \ldots, b_{r+1}, q; q)_k}\left(\frac{bcx}{aq}\right)^k\sum_{j=0}^{k}\frac{(aq/bc, aq^k, q^{-k}; q)_j}{(aq/b, aq/c, q; q)_j}q^j\\
&=\sum_{0\le j\le k\le n}\frac{(aq/bc; q)_j}{(aq/b, aq/c, q; q)_j}q^{\binom{j}{2}}(-q)^j\frac{(a_1, \ldots, a_r, q^{-n}; q)_k}{(b_1, \ldots, b_{r+1}; q)_k}\left(\frac{bcx}{aq}\right)^k\frac{(a; q)_{k+j}}{(q; q)_{k-j}}q^{-kj}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(aq/bc; q)_j}{(aq/b, aq/c, q; q)_j}(-1)^j q^{-\binom{j}{2}}\\
&\cdot\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(a_1, \ldots, a_r, q^{-n}; q)_{k+j}}{(b_1, \ldots, b_{r+1}; q)_{k+j}}\left(\frac{bcx}{aq}\right)^{k+j}\frac{(a; q)_{k+2j}}{(q; q)_k}q^{-kj}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{(aq/bc, a_1, \ldots, a_r, q^{-n}; q)_j(a; q)_{2j}}{(aq/b, aq/c, b_1, \ldots, b_{r+1}, q; q)_j}q^{-\binom{j}{2}}\left(-\frac{bcx}{aq}\right)^j\\
&\cdot{}_{r+2}\phi_{r+1}\left[\begin{matrix}aq^{2j}, a_1q^j, \ldots, a_rq^j, q^{j-n}\\ b_1q^j, \ldots, b_{r+1}q^j\end{matrix}; \frac{bcx}{aq^{1+j}}\right].
\end{aligned}
$$

□

Lemma 7.21. 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, q^{-n}\\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n}\end{matrix}; q^n\right]=\delta_{n,0}.
$$

Proof. $n=0$ のときは明らか. $n>0$ としてよい. 展開公式より,

$$
\begin{aligned}
&{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, q^{-n}\\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n}\end{matrix}; q^n\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k(a; q)_{2k}}{(\sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n}, q; q)_k}q^{-\binom{n}{k}+(1+n)k}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}aq^{2k}, q^{k-n}\\ aq^{1+n+k}\end{matrix}; -q^{1+n-k}\right].
\end{aligned}
$$

ここで, Bailey-Daum の和公式より,

$$
\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}aq^{2k}, q^{k-n}\\ aq^{1+n+k}\end{matrix}; -q^{1+n-k}\right]&=\frac{(-q; q)_\infty(aq^{1+2k}, aq^{2+2n}; q^2)_\infty}{(aq^{1+n+k}, -q^{1+n-k}; q)_\infty}\\
&=\frac{(-q; q)_{n-k}(aq^{1+2k}, aq^{2+2n}; q^2)_\infty}{(aq^{1+n+k}; q)_\infty}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
&{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n}\end{matrix}; q^n\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k (a; q)_{2k}}{(\sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n}, q; q)_k} q^{-\binom{n}{k}+(1+n)k} \frac{(-q; q)_{n-k} (aq^{1+2k}, aq^{2+2n}; q^2)_\infty}{(aq^{1+n+k}; q)_\infty} \\
&= \frac{(aq^{2+2n}, aq; q^2)_\infty}{(aq^{1+n}; q)_\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k (-q; q)_{n-k}}{(q; q)_k} q^{-\binom{k}{2}+(1+n)k} \\
&= \frac{(aq^{2+2n}, aq; q^2)_\infty (-q; q)_n}{(aq^{1+n}; q)_\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k}{(-q^{-n}, q; q)_k} q^k.
\end{aligned}
$$

ここで, Vandermonde の恒等式より,

$$
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-q^{-1}, q^{-n}; q)_k}{(-q^{-n}, q; q)_k} q^k = \frac{(q^{1-n}; q)_n}{(-q^{-n}; q)_n} (-q^{-1})^n = 0
$$

であるから, 定理を得る. □

上の証明は, 前に示した Bailey-Daum の和公式や, Vandermonde の恒等式などが用いられているのが興味深い. もう一度展開公式を用いることで, 以下を得る.

Lemma 7.22. 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_6\phi_5\left[\begin{matrix}a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq^{1+n}\end{matrix}; \frac{aq^{1+n}}{bc}\right] = \frac{(aq, aq/bc; q)_n}{(aq/bc, aq/c; q)_n}.
$$

Proof. 展開公式より,

$$
\begin{aligned}
&{}_6\phi_5\left[\begin{matrix}a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq^{1+n}\end{matrix}; \frac{aq^{1+n}}{bc}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(aq/bc, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, q^{-n}; q)_k (a; q)_{2k}}{(aq/b, aq/c, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n}, q; q)_k} q^{-\binom{k}{2}} (-q^n)^k \\
&\cdot {}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq^{2k}, \sqrt{a}q^{1+k}, -\sqrt{a}q^{1+k}, q^{k-n} \\ \sqrt{a}q^k, -\sqrt{a}q^k, aq^{1+n+k}\end{matrix}; q^{n-k}\right].
\end{aligned}
$$

ここで, Lemma 7.21 より,

$$
{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq^{2k}, \sqrt{a}q^{1+k}, -\sqrt{a}q^{1+k}, q^{k-n} \\ \sqrt{a}q^k, -\sqrt{a}q^k, aq^{1+n+k}\end{matrix}; q^{n-k}\right] = \delta_{n-k,0}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&{}_6\phi_5\left[\begin{matrix}a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, q^{-n}\\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq^{1+n}\end{matrix}; \frac{aq^{1+n}}{bc}\right]\\
&= \frac{(aq/bc, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, q^{-n}; q)_n (a; q)_{2n}}{(aq/b, aq/c, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1+n}, q; q)_n} q^{-\binom{n}{2}} (-q^n)^n\\
&= \frac{(aq/bc; q)_n}{(aq/b, aq/c; q)_n} \frac{(1-aq^{2n})(a; q)_{2n}}{(1-a)(aq^{1+n}; q)_n}\\
&= \frac{(aq, aq/bc; q)_n}{(aq/b, aq/c; q)_n}.
\end{aligned}
$$

□

さらに展開公式を用いることで, 十分一般的な定理にたどり着くのである.

Theorem 7.23 (Watson の変換公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e, q^{-n}\\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{1+n}\end{matrix}; \frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right]\\
&= \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} {}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq/bc, d, e, q^{-n}\\ aq/b, aq/c, deq^{-n}/a\end{matrix}; q\right].
\end{aligned}
$$

Proof. 展開公式より,

$$
\begin{aligned}
&{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e, q^{-n}\\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{1+n}\end{matrix}; \frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(aq/bc, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, d, e, q^{-n}; q)_k (a; q)_{2k}}{(\sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{1+n}, q; q)_k} q^{-\binom{k}{2}} \left(-\frac{aq^{1+n}}{de}\right)^k\\
&\cdot {}_6\phi_5\left[\begin{matrix}aq^{2k}, \sqrt{a}q^{1+k}, -\sqrt{a}q^{1+k}, dq^k, eq^k, q^{k-n}\\ \sqrt{a}q^k, -\sqrt{a}q^k, aq^{1+k}/d, aq^{1+k}/e, aq^{1+n+k}\end{matrix}; \frac{aq^{1+n-k}}{de}\right].
\end{aligned}
$$

ここで, Lemma 7.22 より,

$$
\begin{aligned}
&{}_6\phi_5\left[\begin{matrix}aq^{2k}, \sqrt{a}q^{1+k}, -\sqrt{a}q^{1+k}, dq^k, eq^k, q^{k-n}\\ \sqrt{a}q^k, -\sqrt{a}q^k, aq^{1+k}/d, aq^{1+k}/e, aq^{1+n+k}\end{matrix}; \frac{aq^{1+n-k}}{de}\right]\\
&= \frac{(aq^{1+2k}, aq/de; q)_{n-k}}{(aq^{1+k}/d, aq^{1+k}/e; q)_{n-k}}\\
&= \frac{(aq; q)_{n+k}(aq/d, aq/e; q)_k (aq/de)_n}{(aq; q)_{2k}(aq/d, aq/e; q)_n (deq^{-n}/a; q)_k} \left(-\frac{de}{a}\right)^k q^{\binom{k}{2}-nk}\\
&= \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} \frac{(aq/d, aq/e, aq^{1+n}; q)_k}{(aq; q)_{2k}(deq^{-n}/a; q)_k} \left(-\frac{de}{a}\right)^k q^{\binom{k}{2}-nk}
\end{aligned}
$$

であるから, 以下のように定理が示される.

$$
\begin{aligned}
&{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n}\end{matrix};\frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(aq/bc,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,d,e,q^{-n};q)_k(a;q)_{2k}}{(\sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n},q;q)_k}q^{-\binom{k}{2}}\left(-\frac{aq^{1+n}}{de}\right)^k\\
&\cdot\frac{(aq,aq/de;q)_n}{(aq/d,aq/e;q)_n}\frac{(aq/d,aq/e,aq^{1+n};q)_k}{(aq;q)_{2k}(deq^{-n}/a;q)_k}\left(-\frac{de}{a}\right)^k q^{\binom{k}{2}-nk}\\
&=\frac{(aq,aq/de;q)_n}{(aq/d,aq/e;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(aq/bc,d,e,q^{-n};q)_k}{(aq/b,aq/c,deq^{-n}/a,q;q)_k}q^k.
\end{aligned}
$$

□

右辺の ${}_8\phi_7$ のような形の q 超幾何級数を very-well-poised という. それは一般に以下のようなものである.

$$
{}_{r+3}W_{r+2}(a;b_1,\dots,b_r;x):={}_{r+3}\phi_{r+2}\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b_1,\dots,b_r\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b_1,\dots,aq/b_r\end{matrix};x\right]
$$

Watson の変換公式の $q\to 1$ の極限を考えると以下のようになる.

Corollary 7.24 (Whipple の変換公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left[\begin{matrix}a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,-n\\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,1+a-d,1+a-e,1+a+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+a,1+a-d-e)_n}{(1+a-d,1+a-e)_n}{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+a-b-c,d,e,-n\\ 1+a-b,1+a-c,d+e-n-a\end{matrix};1\right].
\end{aligned}
$$

次に Watson の変換公式から得られる和公式を導出する.

Theorem 7.25 (Jackson の和公式)**.** $a^2q^{1+n}=bcde$ のとき,

$$
{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n}\end{matrix};q\right]=\frac{(aq,aq/bc,aq/bd,aq/cd;q)_n}{(aq/b,aq/c,aq/d,aq/bcd;q)_n}.
$$

が成り立つ.

Proof. Watson の変換公式

$$
\begin{aligned}
&{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,d,e,q^{-n}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq^{1+n}\end{matrix};\frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right]\\
&=\frac{(aq,aq/bc;q)_n}{(aq/b,aq/c;q)_n}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}aq/de,b,c,q^{-n}\\ aq/d,aq/e,bcq^{-n}/a\end{matrix};q\right]
\end{aligned}
$$

において, 条件より $a^2q^{2+n}/bcde = q, aq/de = bcq^{-n}/a$ だから,

$$ {}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{1+n} \end{matrix}; q\right] = \frac{(aq, aq/bc; q)_n}{(aq/b, aq/c; q)_n} {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} b, c, q^{-n} \\ aq/d, aq/e \end{matrix}; q\right]. $$

ここで, q-Saalschutz の和公式より,

$$ {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} b, c, q^{-n} \\ aq/d, aq/e \end{matrix}; q\right] = \frac{(aq/bd, aq/cd; q)_n}{(aq/d, aq/bcd; q)_n} $$

であるから, 定理を得る. □

これの $q \to 1$ の極限を考えると以下のようになる.

Corollary 7.26 (Dougall の和公式)**.** $1 + 2a + n = b + c + d + e$ のとき,

$$ \begin{aligned} &{}_7F_6\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d, e, -n \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right] \\ &= \frac{(1+a, 1+a-b-c, 1+a-b-d, 1+a-c-d)_n}{(1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-b-c-d)_n} \end{aligned} $$

が成り立つ.

Corollary 7.27. 以下の等式が成り立つ.

$$ {}_6\phi_5\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d \end{matrix}; \frac{aq}{bcd}\right] = \frac{(aq, aq/bc, aq/bd, aq/cd; q)_\infty}{(aq/b, aq/c, aq/d, aq/bcd; q)_\infty}. $$

Proof. Jackson の和公式

$$ {}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, a^2q^{1+n}/bcd, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, bcdq^{-n}/a, aq^{1+n} \end{matrix}; q\right] = \frac{(aq, aq/bc, aq/bd, aq/cd; q)_n}{(aq/b, aq/c, aq/d, aq/bcd; q)_n} $$

において, $n \to \infty$ とすればよい. □

これは $|q| < 1$ であることにより, 古典的な場合と比べて収束性が自明になっている点で興味深い. $q \to 1$ として以下を得る.

Corollary 7.28. 以下の等式が成り立つ.

$$ \begin{aligned} &{}_5F_4\left[\begin{matrix} a, 1+\frac{a}{2}, b, c, d \\ \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d \end{matrix}; 1\right] \\ &= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)}. \end{aligned} $$

Corollary 7.27 において, $d = \sqrt{a}$ として, 以下を得る.

Corollary 7.29 (q-Dixon の恒等式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_4\phi_3\left[\begin{matrix} a, -\sqrt{a}q, b, c \\ -\sqrt{a}, aq/b, aq/c \end{matrix}; \frac{\sqrt{a}q}{bc}\right] = \frac{(aq, \sqrt{a}q/b, \sqrt{a}q/c, aq/bc; q)_\infty}{(\sqrt{a}q, aq/b, aq/c, \sqrt{a}q/bc; q)_\infty}.
$$

特に $c = -\sqrt{a}$ とすれば Bailey-Daum の和公式を得るので, これは Bailey-Daum の和公式の拡張になっている.

$q \to 1$ として, 以下を得る.

Corollary 7.30 (Dixon の恒等式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)\Gamma(1+a-b-c)}.
$$

7.4 Ramanujan の和公式

Definition 7.31. 両側 q 超幾何級数を以下のように定義する.

$$
{}_r\psi_s\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; x\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1, \ldots, a_r; q)_n}{(b_1, \ldots, b_s; q)_n} \left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{s-r} x^n.
$$

これは,

$$
\begin{aligned}
{}_r\psi_s\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; x\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \ldots, a_r; q)_n}{((b_1, \ldots, b_s; q)_n} \left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{s-r} x^n \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_1, \ldots, a_r; q)_{-n}}{(b_1, \ldots, b_s; q)_{-n}} \left((-1)^n q^{\binom{-n}{2}}\right)^{s-r} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \ldots, a_r; q)_n}{(b_1, \ldots, b_s; q)_n} \left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{s-r} x^n \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q/b_1, \ldots, q/b_s; q)_n}{(q/a_1, \ldots, q/a_r; q)_n} \left(\frac{b_1 \cdots b_s}{a_1 \cdots a_r x}\right)^n
\end{aligned}
$$

と変形できることから, $r > s$ のときは,

$$
\left|\frac{b_1 \cdots b_r}{a_1 \cdots a_r}\right| < |x|
$$

ならば収束し, $r = s$ のときは, さらに $|x| < 1$ であれば収束する. また, b_i のどれかが q に等しいときは, 2 つ目の和が 0 になるので, 通常の q 超幾何級数に一致する. よって両側 q 超幾何級数は, 通常の q 超幾何級数の拡張であると考えることができる.

Theorem 7.32 (Ramanujan の和公式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$ {}_1\psi_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; x \Bigg] = \frac{(q, b/a, ax, q/ax; q)_\infty}{(b, q/a, x, b/ax; q)_\infty}. $$

Proof. Heine の和公式より,

$$ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq^{-n}, b/ax; q)_k}{(bq^{-n}, q; q)_k} x^k = \frac{(b/a, axq^{-n}; q)_\infty}{(bq^{-n}, x; q)_\infty}. $$

ここで,

$$ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq^{-n}, b/ax; q)_k}{(bq^{-n}, q; q)_k} x^k &= \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(aq^{-n}, b/ax; q)_{n+k}}{(bq^{-n}, q; q)_{n+k}} x^{n+k} \\ &= \frac{(aq^{-n}, b/ax; q)_n}{(bq^{-n}, q; q)_n} x^n \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(a, bq^n/ax; q)_k}{(b, q^{1+n}; q)_k} x^k. \end{aligned} $$

よって,

$$ \begin{aligned} \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(a, bq^n/ax; q)_k}{(b, q^{1+n}; q)_k} x^k &= \frac{(b/a, axq^{-n}; q)_\infty}{(bq^{-n}, x; q)_\infty} \frac{(bq^{-n}, q; q)_n}{(aq^{-n}, b/ax; q)_n} x^{-n} \\ &= \frac{(b/a, ax; q)_\infty}{(b, x; q)_\infty} \frac{(axq^{-n}, q; q)_n}{(aq^{-n}, b/ax; q)_n} x^{-n} \\ &= \frac{(b/a, ax; q)_\infty}{(b, x; q)_\infty} \frac{(q/ax, q; q)_n}{(q/a, b/ax; q)_n}. \end{aligned} $$

ここで, $n \to \infty$ として定理が示される. □

$b = q$ とすれば, q 二項定理が得られるので, これは q 二項定理の拡張になっている.

Example 7.33. Ramanujan の和公式より, 以下の和が求められる.

$$ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{1 - aq^n} &= \frac{1}{1-a} {}_1\psi_1 \begin{bmatrix} a \\ aq \end{bmatrix}; x \Bigg] \\ &= \frac{1}{1-a} \frac{(q, q, ax, q/ax; q)_\infty}{(aq, q/a, x, q/x; q)_\infty} \\ &= \frac{(q, q, ax, q/ax; q)_\infty}{(a, q/a, x, q/x; q)_\infty}. \end{aligned} $$

収束条件は $|q| < |x| < 1$ である. a, x に関して対称になっているのが興味深い.

Theorem 7.34 (Jacobi の三重積)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$(q, x, q/x; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n.$$

Proof. Ramanujan の和公式より,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a; q)_n \left(\frac{x}{a}\right)^n &= {}_1\psi_1 \left[\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}; \frac{x}{a}\right] \\ &= \frac{(q, x, q/x; q)_\infty}{(q/a, x/a; q)_\infty}.\end{aligned}$$

ここで, $a \to \infty$ として定理を得る. □

Corollary 7.35 (Euler の五角数定理)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$(q; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2}.$$

Proof. Jacobi の三重積より, 以下のように示される.

$$(q; q)_\infty = (q, q^2, q^3; q^3)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{3\binom{n}{2}+n}.$$

□

Rogers-Ramanujan の恒等式は最も美しい q の恒等式の 1 つである.

Theorem 7.36 (Rogers-Ramanujan の恒等式)**.** 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} &= \frac{1}{(q, q^4; q^5)_\infty} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} &= \frac{1}{(q^2, q^3; q^5)_\infty}.\end{aligned}$$

Proof. Watson の変換公式

$$\begin{aligned}&{}_8\phi_7 \left[\begin{matrix} a, \sqrt{a}q, -\sqrt{a}q, b, c, d, e, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{1+n} \end{matrix}; \frac{a^2q^{2+n}}{bcde}\right] \\ &= \frac{(aq, aq/de; q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} aq/bc, d, e, q^{-n} \\ aq/b, aq/c, deq^{-n}/a \end{matrix}; q\right]\end{aligned}$$

において, $b,c,d,e,n\to\infty$ として,

$$ {}_3\phi_7\left[\begin{matrix} a,\sqrt{q},-\sqrt{a}q \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},0,0,0,0,0 \end{matrix};a^2q^2\right]=(aq;q)_\infty {}_0\phi_1\left[\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix};aq\right] $$

より,

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}a^n=\frac{1}{(aq;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nq^{5\binom{n}{2}}(1-aq^{2n})(a;q)_n}{(1-a)(q;q)_n}(a^2q^2)^n. $$

1 つ目の式は $a\to 1$ として, Jacobi の三重積より,

$$ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nq^{5\binom{n}{2}}(1-q^{2n})}{1-q^n}q^{2n}\right) \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nq^{5\binom{n}{2}}(1+q^n)q^{2n}\right) \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nq^{5\binom{n}{2}+2n} \\ &= \frac{(q^2,q^3,q^5;q^5)_\infty}{(q;q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}. \end{aligned} $$

2 つ目の式は $a\to q$ として, Jacobi の三重積より,

$$ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nq^{5\binom{n}{2}}(1-q^{2n+1})q^{4n} \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nq^{5\binom{n}{2}+4n} \\ &= \frac{(q,q^4,q^5;q^5)_\infty}{(q;q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}. \end{aligned} $$

□

8 多重ゼータ値

8.1 多重ゼータ値

Definition 8.1 (多重ゼータ値)**.** 自然数の組 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し, $\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}} = \prod_{i=1}^{r} n_i^{k_i}$ とする. 多重ゼータ値を

$$\zeta(\boldsymbol{k}) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}$$

$$\zeta^{\star}(\boldsymbol{k}) := \sum_{0<n_1\leq\cdots\leq n_r} \frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}$$

と定義する. $\star$ がついている方を star, そうでない方を non-star という. このときの $\boldsymbol{k}$ をインデックスといい, 特に $k_r > 1$ となるものを許容インデックスという. 多重調和和を

$$\zeta_n(\boldsymbol{k}) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r\leq n} \frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}$$

$$\zeta_n^{\star}(\boldsymbol{k}) := \sum_{0<n_1\leq\cdots\leq n_r\leq n} \frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}$$

と定義する. 空インデックス $\varnothing$ に対しては, $\zeta(\varnothing) = \zeta_n(\varnothing) = 1$ と定める. そして, 形式的なインデックスの線形結合全体に線形に拡張して定義する. $\mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) := k_1 + \cdots + k_r$ を重さ, $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}) := r$ を深さという.

一般に, star の多重ゼータ値は以下のように, non-star の多重ゼータ値の線形結合で表される.

$$\zeta^{\star}(\boldsymbol{k}) = \sum \zeta(k_1 \circ \cdots \circ k_r)$$

ここで, $\circ$ は , か $+$ のどちらかとする. 例えば $r = 3$ のとき,

$$\zeta^{\star}(k_1, k_2, k_3) = \zeta(k_1, k_2, k_3) + \zeta(k_1 + k_2, k_3) + \zeta(k_1, k_2 + k_3) + \zeta(k_1 + k_2 + k_3)$$

のようになる.

以下, 複素数の r 個の繰り返しを $\{x\}^r$ と表すことにする.

Proposition 8.2. 許容インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し, $\zeta(\boldsymbol{k})$ は収束する.

Proof.

$$\zeta(\boldsymbol{k}) \leq \zeta(\{1\}^{\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})-1}, 2)$$

であるから, 任意の $r>0$ に対し,

$$\zeta(\{1\}^r, 2)$$

が収束することを示せば十分である.

$$\begin{aligned}
\zeta(\{1\}^r, 2) &= \sum_{0<n_1<\cdots<n_r<n} \frac{1}{n_1 \cdots n_{r-1} n_r n} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{0<n_1,\ldots,n_r<n} \frac{1}{n_1 \cdots n_{r-1} n_r} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} H_{n-1}^r
\end{aligned}$$

ここで, Theorem 5.6 より右辺の級数は収束する. □

Theorem 8.3. 以下の等式が成り立つ.

$$\zeta(\{2\}^r) = \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}.$$

Proof. $\sin x$ の無限乗積展開

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

の x^{2r} の係数を比較して,

$$\frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!} = \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^2 \cdots n_r^2}$$

を得る. □

特に, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ が成り立つ.

8.2 調和関係式

Theorem 8.4 (調和関係式)**.** インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_s)$ の間に

$$\boldsymbol{k}_- = \begin{cases} (k_1, \ldots, k_{r-1}), & r > 1 \\ \varnothing, & r = 1 \end{cases}$$

として, 再帰的に次のような積 $*$ を定義する.

(i) $(\boldsymbol{k} * \varnothing) = (\varnothing * \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}$

(ii) $(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{k}_- * \boldsymbol{l}, k_r) + (\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}_-, l_s) + (\boldsymbol{k}_- * \boldsymbol{l}_-, k_r + l_s)$

これを調和積という. 以下の調和関係式が成り立つ.

$$\zeta_n(\boldsymbol{k})\zeta_n(\boldsymbol{l}) = \zeta_n(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}).$$

Proof. 深さに関する数学的帰納法による. 片方が $\varnothing$ のとき, 明らか.

$$\zeta_n(\boldsymbol{k}) = \sum_{0<m\le n} \frac{\zeta_{m-1}(\boldsymbol{k}_-)}{m^{k_r}}$$

より, 帰納法の仮定を用いて,

$$\begin{aligned}
\zeta_n(\boldsymbol{k})\zeta_n(\boldsymbol{l}) &= \sum_{0<m\le n} \frac{\zeta_{m-1}(\boldsymbol{k}_-)}{m^{k_r}} \sum_{0<r\le n} \frac{\zeta_{r-1}(\boldsymbol{l}_-)}{r^{l_s}} \\
&= \sum_{0<m<r\le n} \frac{\zeta_{m-1}(\boldsymbol{k}_-)}{m^{k_r}} \frac{\zeta_{r-1}(\boldsymbol{l}_-)}{r^{l_s}} + \sum_{0<r<m\le n} \frac{\zeta_{m-1}(\boldsymbol{k}_-)}{m^{k_r}} \frac{\zeta_{r-1}(\boldsymbol{l}_-)}{r^{l_s}} \\
&+ \sum_{0<m=r\le n} \frac{\zeta_{m-1}(\boldsymbol{k}_-)}{m^{k_r}} \frac{\zeta_{r-1}(\boldsymbol{l}_-)}{r^{l_s}} \\
&= \sum_{0<r\le n} \frac{\zeta_{r-1}(\boldsymbol{k})\zeta_{r-1}(\boldsymbol{l}_-)}{r^{l_s}} + \sum_{0<m\le n} \frac{\zeta_{m-1}(\boldsymbol{k}_-)\zeta_{m-1}(\boldsymbol{l})}{m^{k_r}} \\
&+ \sum_{0<m\le n} \frac{\zeta_{m-1}(\boldsymbol{k}_-)\zeta_{m-1}(\boldsymbol{l}_-)}{m^{k_r+l_s}} \\
&= \sum_{0<r\le n} \frac{\zeta_{r-1}(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}_-)}{r^{l_s}} + \sum_{0<m\le n} \frac{\zeta_{m-1}(\boldsymbol{k}_- * \boldsymbol{l})}{m^{k_r}} \\
&+ \sum_{0<m\le n} \frac{\zeta_{m-1}(\boldsymbol{k}_- * \boldsymbol{l}_-)}{m^{k_r+l_s}}
\end{aligned}$$

であることから従う. □

8.3 大野関係式

大野関係式は, 多重ゼータ値における重要な公式である双対性と和公式をともに一般化したものであり, 非常に重要な関係式族である. 以下, [3] における連結和法を用いて証明を行うので, そのための矢印記法を用意する.

Definition 8.5. インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し, 以下の記法を導入する.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{k}_{\uparrow}:=(k_1,\dots,k_{r-1},k_r+1),\quad {}_{\uparrow}\boldsymbol{k}:=(k_1+1,k_2,\dots,k_r)\\&\boldsymbol{k}_{\downarrow}:=(k_1,\dots,k_{r-1},k_r-1),\quad {}_{\downarrow}\boldsymbol{k}:=(k_1-1,k_2\dots,k_r)\\&\boldsymbol{k}_{\to}:=(k_1,\dots,k_r,1),\quad {}_{\leftarrow}\boldsymbol{k}:=(1,k_1,\dots,k_r).\end{aligned}$$

許容インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\boldsymbol{k}=(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\dots,\{1\}^{a_r-1},b_r+1)$$

と自然数 a_i,b_i が一意に定まる. このとき,

$$\boldsymbol{k}^{\dagger}=(\{1\}^{b_r-1},a_r+1,\dots,\{1\}^{b_1-1},a_1+1)$$

を双対インデックスという. また, インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\boldsymbol{k}=(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\dots,\{1\}^{a_r-1},b_r+1,\{1\}^{a_{r+1}-1})$$

と自然数 a_i,b_i が一意に定まる. このとき,

$$\boldsymbol{k}^{\vee}=(a_1,\{1\}^{b_1-1},a_2+1,\dots,a_r+1,\{1\}^{b_r-1},a_{r+1})$$

を Hoffman 双対インデックスという.

Definition 8.6 (連結和)**.** インデックス $\boldsymbol{k}:=(k_1,\dots,k_r),\boldsymbol{l}:=(l_1,\dots,l_s)$ に対し,

$$Z(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l};x):=\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r\\0<m_1<\cdots<m_s}}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^{k_i-1}(n_i-x)}\cdot\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{m_i^{l_i-1}(m_i-x)}\cdot\frac{(1-x)_{n_r}(1-x)_{m_s}}{(1-x)_{n_r+m_s}}$$

として, $Z(\boldsymbol{k};\varnothing;x)=Z(\varnothing;\boldsymbol{k};x)=O(\boldsymbol{k};x)$ と定める. ここで,

$$O(\boldsymbol{k};x):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^{k_i-1}(n_i-x)}$$

を表す.

定義から明らかに $Z(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l};x)=Z(\boldsymbol{l};\boldsymbol{k};x)$ が成り立つ.

Theorem 8.7 (輸送関係式)**.** インデックス $\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}$ に対し,

$$\begin{aligned}Z(\boldsymbol{k}_{\to};\boldsymbol{l};x)&=Z(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l}_{\uparrow};x)\\Z(\boldsymbol{k}_{\uparrow};\boldsymbol{l};x)&=Z(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l}_{\to};x)\end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. 対称性より, 上の式を示せば十分である.

$$\begin{aligned}
&Z(\boldsymbol{k}_{\rightarrow};\boldsymbol{l};x)\\
&=\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r<a\\0<m_1<\cdots<m_s}}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^{k_i-1}(n_i-x)}\cdot\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{m_i^{l_i-1}(m_i-x)}\\
&\cdot\frac{1}{a-x}\frac{(1-x)_a(1-x)_{m_s}}{(1-x)_{a+m_s}}.
\end{aligned}$$

ここで, n_r を固定したとき,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_r<a}\frac{1}{a-x}\frac{(1-x)_a(1-x)_{m_s}}{(1-x)_{a+m_s}}\\
&=\frac{1}{m_s}\sum_{n_r<a}\left(\frac{(1-x)_{a-1}(1-x)_{m_s}}{(1-x)_{a+m_s-1}}-\frac{(1-x)_a(1-x)_{m_s}}{(1-x)_{a+m_s}}\right)\\
&=\frac{1}{m_s}\frac{(1-x)_{n_r}(1-x)_{m_s}}{(1-x)_{n_r+m_s}}
\end{aligned}$$

が成り立つことから,

$$Z(\boldsymbol{k}_{\rightarrow};\boldsymbol{l};x)=Z(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l}_{\uparrow};x)$$

を得る. □

これを繰り返し用いることにより, $Z(\boldsymbol{k};\varnothing;x)$ の $\boldsymbol{k}$ 側の重さを 1 ずつ下げていくことができ, 最終的に $\varnothing$ になる. これによって, 実は $Z(\varnothing;\boldsymbol{k}^{\dagger};x)$ に移るのであるが, そこから以下のような多重ゼータ値の間の関係式族を得ることができる.

Theorem 8.8 (大野関係式)**.** 許容インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と非負整数 h に対し,

$$O_h(\boldsymbol{k}):=\sum_{0\le e_i,e_1+\cdots+e_r=h}\zeta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{e}).$$

ここで $(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{e})=(k_1+e_1,\ldots,k_r+e_r)$ とする. このとき,

$$O_h(\boldsymbol{k})=O_h(\boldsymbol{k}^{\dagger})$$

が成り立つ.

Proof. まず,

$$
\begin{aligned}
O(\boldsymbol{k};x) &= \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i^{k_i-1}(n_i-x)} \\
&= \sum_{0\le e_i} x^{e_1+\cdots+e_r} \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{e}}} \\
&= \sum_{0\le h} O_h(\boldsymbol{k}) x^h
\end{aligned}
$$

より, $O(\boldsymbol{k};x) = O(\boldsymbol{k}^\dagger;x)$, つまり

$$
Z(\boldsymbol{k};\varnothing;x) = Z(\varnothing;\boldsymbol{k}^\dagger;x)
$$

を示せばよい. 矢印の r 回の繰り返しに対して $\rightarrow^r$ のような記法を用いるとすると,

$$
(\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \ldots, \{1\}^{a_r-1}, b_r+1) = \varnothing_{\rightarrow^{a_1}\uparrow^{b_1}\cdots\rightarrow^{a_r}\uparrow^{b_r}}
$$

が成り立つ. よって, 輸送関係式を $\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})$ 回用いることによって,

$$
\boldsymbol{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \ldots, \{1\}^{a_r-1}, b_r+1)
$$

に対し,

$$
\begin{aligned}
Z(\boldsymbol{k};\varnothing;x) &= Z(\varnothing_{\rightarrow^{a_1}\uparrow^{b_1}\cdots\rightarrow^{a_r}\uparrow^{b_r}};\varnothing;x) \\
&= Z(\varnothing_{\rightarrow^{a_1}\uparrow^{b_1}\cdots\rightarrow^{a_r}\uparrow^{b_r-1}};\varnothing_{\rightarrow};x) \\
&\cdots \\
&= Z(\varnothing_{\rightarrow^{a_1}\uparrow^{b_1}\cdots\rightarrow^{a_r}};\varnothing_{\rightarrow^{b_r}};x) \\
&\cdots \\
&= Z(\varnothing;\varnothing_{\rightarrow^{b_r}\uparrow^{a_r}\cdots\rightarrow^{b_1}\uparrow^{a_1}};x) \\
&= Z(\varnothing;\boldsymbol{k}^\dagger;x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

特に大野関係式において, $h=0$ としたものが以下である. それは多重ゼータ値において最も美しい定理の 1 つだと思う.

Theorem 8.9 (双対性)**.** 許容インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$
\zeta(\boldsymbol{k}) = \zeta(\boldsymbol{k}^\dagger).
$$

Example 8.10. $\boldsymbol{k}=(1,2)$ として, Euler による等式

$$\zeta(1,2)=\zeta(3)$$

を得る.

大野関係式において, $\boldsymbol{k}=(\{1\}^{r-1},2), h=k-r-1$ とすることにより, 以下の公式が得られる.

Theorem 8.11 (和公式)**.** $0<r<k$ に対し,

$$\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=k\\ \mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=r}}\zeta(\boldsymbol{k})=\zeta(k)$$

が成り立つ. ただし $\boldsymbol{k}$ は許容インデックスとする.

Example 8.12. 和公式を用いて以下のような値を求めることができる.

$$\begin{aligned}\zeta^{\star}(\{1\}^{r-1},2)&=\sum_{j=1}^{r}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=r+1\\ \mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=j}}\zeta(\boldsymbol{k})\\&=\sum_{j=1}^{r}\zeta(r+1)\\&=r\zeta(r+1).\end{aligned}$$

8.4 Hoffman の恒等式

以下, 連結和の定義とその輸送関係式も全て証明中に書くことにする.

Theorem 8.13 (Hoffman の恒等式)**.** 任意のインデックス $\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r\le N}\frac{(-1)^{n_r-1}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}\binom{N}{n_r}=\zeta_N(\boldsymbol{k}^{\vee})$$

が成り立つ.

Proof. まず, インデックス $\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}$ に対し, 連結和を以下で定義する.

$$Z_N(\boldsymbol{k};\boldsymbol{l})=\sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r\le m_1\le\cdots\le m_s\le N}\frac{(-1)^{n_r-1}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}_{\downarrow}}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{l}}}\binom{m_1}{n_r}.$$

このとき, 輸送関係式

$$
\begin{aligned}
Z_N(\boldsymbol{k}_{\to};\boldsymbol{l}) &= Z_N(\boldsymbol{k};{}_{\uparrow}\boldsymbol{l}) \\
Z_N(\boldsymbol{k}_{\uparrow};\boldsymbol{l}) &= Z_N(\boldsymbol{k};{}_{\leftarrow}\boldsymbol{l})
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示す. 関係している部分を考えると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n_r}\sum_{n_r\le a\le m_1}(-1)^{a-1}\binom{m_1}{a} &= \frac{(-1)^{n_r-1}}{m_1}\binom{m_1}{n_r} \\
\sum_{n_r\le a\le m_1}\frac{1}{a}\binom{a}{n_r} &= \frac{1}{n_r}\binom{m_1}{n_r}
\end{aligned}
$$

の 2 つの式を示せばよいことが分かる. 1 つ目の式は以下の計算により得られる.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n_r}\sum_{n_r\le a\le m_1}(-1)^{a-1}\binom{m_1}{a} &= \frac{1}{n_r}\sum_{n_r\le a\le m_1}\left((-1)^{a-1}\binom{m_1-1}{a-1}-(-1)^{a-1}\binom{m_1-1}{a}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n_r-1}}{n_r}\binom{m_1-1}{n_r-1} \\
&= \frac{(-1)^{n_r-1}}{m_1}\binom{m_1}{n_r}.
\end{aligned}
$$

2 つ目の式は以下の計算により得られる.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_r\le a\le m_1}\frac{1}{a}\binom{a}{n_r} &= \frac{1}{n_r}\sum_{n_r\le a\le m_1}\left(\binom{a}{n_r}-\binom{a-1}{n_r}\right) \\
&= \frac{1}{n_r}\binom{m_1}{n_r}.
\end{aligned}
$$

よって, 輸送関係式が示された. 後は

$$
\begin{aligned}
Z_N(\boldsymbol{k}_{\uparrow};\varnothing) &= \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r\le N}\frac{(-1)^{n_r-1}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}\binom{N}{n_r} \\
Z_N(1;\boldsymbol{k}) &= \zeta_N(\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

より,

$$
Z_N(\boldsymbol{k}_{\uparrow};\varnothing) = Z_N(\boldsymbol{k};1) = \cdots = Z_N(1;\boldsymbol{k}^{\vee})
$$

のように Hoffman 双対に移ることを

$$
\boldsymbol{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \dots, \{1\}^{a_r-1}, b_r+1, \{1\}^{a_{r+1}-1})
$$

を代入して確かめればよい. □

Example 8.14. Hoffman の恒等式において, $\boldsymbol{k} = (1)$ とすると, Euler による等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = H_n$$

を得る.

9　多重ポリログ

9.1　多重ポリログ

Definition 9.1 (多重ポリログ)**.** インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_r)$ と $|x| \le 1$ の複素数に対し,

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(x) &:= \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{x^{n_r}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}} \\ \mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}(x) &:= \sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r} \frac{x^{n_r}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}} \end{aligned}$$

と定める. 多重ゼータ値同様, 空インデックスに対しては 1 と定め, 形式的なインデックスの線形結合全体に対して線形に拡張して定義する.

特に多重ゼータ値は $x = 1$ での値として表される.

9.2　シャッフル関係式

Theorem 9.2. $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ のどちらか一方は許容インデックス, $\boldsymbol{h}$ をインデックスとして, 記号 $ш(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{l}; \boldsymbol{h})$ を

$$\begin{aligned} ш(\boldsymbol{k}_{\uparrow}; \boldsymbol{l}_{\uparrow}; \boldsymbol{h}) &= ш(\boldsymbol{k}_{\uparrow}; \boldsymbol{l}; {}_{\uparrow}\boldsymbol{h}) + ш(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{l}_{\uparrow}; {}_{\uparrow}\boldsymbol{h}) \\ ш(\boldsymbol{k}_{\rightarrow}; \boldsymbol{l}; {}_{\uparrow}\boldsymbol{h}) &= ш(\boldsymbol{k}_{\uparrow}; \boldsymbol{l}; {}_{\leftarrow}\boldsymbol{h}) \\ ш(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{l}_{\rightarrow}; {}_{\uparrow}\boldsymbol{h}) &= ш(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{l}_{\uparrow}; {}_{\leftarrow}\boldsymbol{h}) \\ ш(\boldsymbol{k}_{\uparrow}; 1; {}_{\uparrow}\boldsymbol{l}) &= ш(1; \boldsymbol{k}_{\uparrow}; {}_{\uparrow}\boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{h}) \end{aligned}$$

と再帰的に定める. 定義より, これは必ずインデックスの線形結合になる. インデックス $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ に対し, シャッフル積 ш を

$$\boldsymbol{k} \mathbin{ш} \boldsymbol{l} := ш(\boldsymbol{k}_{\uparrow}; \boldsymbol{l}_{\uparrow}; 1)$$

と定義する．また, $\boldsymbol{k} ш \varnothing = \varnothing ш \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$ と定める．このとき,

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(x)\mathrm{Li}_{\boldsymbol{l}}(x) = \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k} ш \boldsymbol{l}}(x)$$

が成り立つ.

Proof. $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ のどちらかが空インデックスのときは明らか．連結和を以下で定義する.

$$Z(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{l}; \boldsymbol{h}; x) := \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_a \\ 0<m_1<\cdots<m_b \\ n_a+m_b=r_1<\cdots<r_c}} \frac{x^{r_c}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}_\downarrow}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{l}_\downarrow}\boldsymbol{r}^{\downarrow\boldsymbol{h}}}$$

このとき, 輸送関係式

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{k}_\uparrow; \boldsymbol{l}_\uparrow; \boldsymbol{h}; x) &= Z(\boldsymbol{k}_\uparrow; \boldsymbol{l}; {}_\uparrow\boldsymbol{h}; x) + Z(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{l}_\uparrow; {}_\uparrow\boldsymbol{h}; x) \\ Z(\boldsymbol{k}_\rightarrow; \boldsymbol{l}; {}_\uparrow\boldsymbol{h}; x) &= Z(\boldsymbol{k}_\uparrow; \boldsymbol{l}; {}_\leftarrow\boldsymbol{h}; x) \\ Z(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{l}_\rightarrow; {}_\uparrow\boldsymbol{h}; x) &= Z(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{l}_\uparrow; {}_\leftarrow\boldsymbol{h}; x) \end{aligned}$$

が成り立つことを示す．対称性

$$Z(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{l}; \boldsymbol{h}; x) = Z(\boldsymbol{l}; \boldsymbol{k}; \boldsymbol{h}; x)$$

より, 2 つ目の式は 3 つ目の式と同値である．1 つ目の式は

$$\frac{1}{n_a m_b} = \frac{1}{n_a r_1} + \frac{1}{m_b r_1}$$

より得られる．2 つ目の式は, 関係する部分だけ考えると,

$$\sum_{n_r<a, a+m_s=r_1} 1 = \sum_{n_r+m_s<r_1} 1$$

であることから示される．よって

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(x)\mathrm{Li}_{\boldsymbol{l}}(x) &= Z(\boldsymbol{k}_\uparrow; \boldsymbol{l}_\uparrow; 1; x) \\ Z(\boldsymbol{k}_\uparrow; 1; {}_\uparrow\boldsymbol{h}; x) &= Z(1; \boldsymbol{k}_\uparrow; {}_\uparrow\boldsymbol{h}; x) = \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{h}}(x) \end{aligned}$$

であることと, シャッフル積の定義より, 定理が得られる． □

シャッフル積の定義から

$$ш(\boldsymbol{k}_\uparrow; \boldsymbol{l}_\uparrow; h+1, \boldsymbol{h}) = ((\boldsymbol{k} ш \boldsymbol{l})_{\uparrow^h}, \boldsymbol{h})$$

が成立することが分かる．これにより, 次の再帰的定義が得られる．

Definition 9.3. シャッフル積 ш を, $\boldsymbol{k}\,\text{ш}\,\varnothing = \varnothing\,\text{ш}\,\boldsymbol{k}$ として以下のように再帰的に定める.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_{\uparrow}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l}_{\uparrow} &= (\boldsymbol{k}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l}_{\uparrow} + \boldsymbol{k}_{\uparrow}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l})_{\uparrow}\\
\boldsymbol{k}_{\uparrow}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l}_{\rightarrow} &= (\boldsymbol{k}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l}_{\rightarrow})_{\uparrow} + (\boldsymbol{k}_{\uparrow}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l})_{\rightarrow}\\
\boldsymbol{k}_{\rightarrow}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l}_{\uparrow} &= (\boldsymbol{k}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l}_{\uparrow})_{\rightarrow} + (\boldsymbol{k}_{\rightarrow}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l})_{\uparrow}\\
\boldsymbol{k}_{\rightarrow}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l}_{\rightarrow} &= (\boldsymbol{k}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l}_{\rightarrow} + \boldsymbol{k}_{\rightarrow}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l})_{\rightarrow}.
\end{aligned}$$

ただし, 矢印記号もインデックスに対して線形に拡張したものとする. 以下これをシャッフル積の定義とする.

多重ポリログのシャッフル関係式において, $x \to 1$ として以下を得る.

Corollary 9.4 (有限複シャッフル関係式)**.** 許容インデックス $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ に対し,

$$\zeta(\boldsymbol{k})\zeta(\boldsymbol{l}) = \zeta(\boldsymbol{k}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l})$$

が成り立つ.

つまり, 多重ゼータ値には調和積とシャッフル積, という 2 つの別の積構造があることが分かる. これを比較して,

$$\zeta(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}) = \zeta(\boldsymbol{k}\,\text{ш}\,\boldsymbol{l})$$

として得られる線形関係式を, 有限複シャッフル関係式という.

Example 9.5. 有限複シャッフル関係式で $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{l} = (2)$ として,

$$(2) * (2) = (4) + 2(2,2), (2)\,\text{ш}\,(2) = 4(1,3) + 2(2,2)$$

であるから, 関係式

$$\zeta(4) = 4\zeta(1,3)$$

を得る.

$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ のどちらか一方を一般のインデックスに拡張して, 正規化をおこなうことで, 発散項を打ち消し, より一般的な正規化複シャッフル関係式を得ることができるが, それは割愛する.

Proposition 9.6. 以下の等式が成り立つ.

$$\mathrm{Li}_{\{1\}^r}(x) = \frac{(-\ln(1-x))^r}{r!}.$$

Proof. $r=1$ のとき,

$$\mathrm{Li}_1(x) = -\ln(1-x)$$

となるのでよい. $r>1$ として, r に関する数学的帰納法により示す. $r-1$ まで成立すると仮定する. シャッフル積より,

$$\frac{(-\ln(1-x))^r}{r!} = \frac{1}{r}\mathrm{Li}_1(x)\mathrm{Li}_{\{1\}^{r-1}}(x) = \frac{1}{r}\mathrm{Li}_{1 ⧢ \{1\}^{r-1}}(x).$$

よって,

$$(1 ⧢ \{1\}^{r-1}) = r(\{1\}^r)$$

を示せばよい. $r=2$ のときは明らか. $r>3$ として, $r-1$ まで成立するとすると,

$$\begin{aligned}(1 ⧢ \{1\}^{r-1}) &= (\varnothing ⧢ \{1\}^{r-1}, 1) + (1 ⧢ \{1\}^{r-2}, 1)\\ &= (\{1\}^r) + (r-1)(\{1\}^r)\\ &= r(\{1\}^r).\end{aligned}$$

上の式は, 一般二項定理

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!}x^n$$

を a のべき級数として係数比較して示すこともできる.

□

9.3 Landen 型接続公式

Theorem 9.7 (Landen 型接続公式)**.** $|x|<1, \quad \mathrm{Re}(x) < \frac{1}{2}$ のとき,

$$\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}}\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}^\vee}(x).$$

Proof. Hoffman の恒等式より, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}\sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r}\frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{n_r} &= -\sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r}\frac{(-1)^{n_r-1}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n_r}{n_r}x^{m+n_r}\\ &= -\sum_{0<n_1\le\cdots\le n_r\le m}\frac{(-1)^{n_r-1}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}\binom{m}{n_r}x^m\\ &= -\sum_{0\le m}\zeta^{\star}_m(\boldsymbol{k}^\vee)x^m\\ &= -\frac{1}{1-x}\mathrm{Li}^{\star}_{\boldsymbol{k}^\vee}(x).\end{aligned}$$

□

Okuda-Ueno[6] により, Landen 型接続公式から大野関係式を得ることができることが示されている.

Example 9.8. $\boldsymbol{k} = (2)$ として,

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\mathrm{Li}^{\star}_{1,1}(x) = -\mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_{1,1}(x).$$

つまり,

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{\ln^2(1-x)}{2}$$

を得る.

10 ゼータ関数

10.1 Riemann ゼータ関数

Riemann ゼータ関数は最も興味深い関数の 1 つで, 素数と密接に関わっている. Riemann ゼータ関数における重要な定理として, 以下の関数等式があるが, 級数の観点からの証明は知られていないと思われるので, ここでは証明しない.

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

まず, $\mathrm{Re}(s) > 1$ で定義してから, 後に一般の複素数で定義を与えることにする.

Definition 10.1. $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対し, Riemann ゼータ関数を

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

によって定義する.

Riemann ゼータ関数の自然数での値, $\zeta(n), 1 < n$ を Riemann ゼータ値という.

Theorem 10.2. 以下の等式が成り立つ.

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{2(2n)!}(2\pi)^{2n}.$$

Proof. $\cot x$ のべき級数展開より,

$$\pi \cot \pi x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n}}{(2n)!} (2\pi)^{2n} x^{2n-1}.$$

一方, Theorem 5.14 より,

$$\begin{aligned}
\pi \cot \pi x &= x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} \\
&= \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 - x^2} \\
&= \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{2r-1}}{n^{2r}} \\
&= \frac{1}{x} - 2 \sum_{r=1}^{\infty} \zeta(2r) x^{2r-1}.
\end{aligned}$$

これらを比較して定理を得る. □

Definition 10.3. $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ と $r < s$ に対し, Barnes ゼータ関数を以下により定義する.

$$\zeta_r(s; x; \boldsymbol{a}) = \sum_{0 \leq n_1, \ldots, n_r} \frac{1}{(x + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n})^s}.$$

ただし, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} := a_1 n_1 + \cdots + a_r n_r$ とする. また, Hurwitz ゼータ関数を

$$\zeta(s; x) := \zeta_1(s; x; 1)$$

と定義する.

Theorem 10.4 (Hasse の級数表示)**.** $1 < s$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\zeta(s; x) = \frac{1}{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+x)^{s-1}} \binom{n-1}{k}.$$

Proof. Example 3.31 において, t に関する形式的べき級数を $f(t) = (x+t)^{1-s}$ として,

$$-(s-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x+t)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{(k+x+t)^{s-1}} \binom{n-1}{k}$$

である. この右辺が収束することを示せば定数項を比較して定理を得る. 任意の実数 s に対し,

$$\Delta^n x^s = O(x^{s-n})$$

であるから, 右辺の和は収束する. □

$x = 1$ として, 以下を得る.

Corollary 10.5. $1 < s$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{s-1}}\binom{n-1}{k-1}.$$

これらの級数は $s \neq 1$ に対して収束するという点で, 最初の定義の拡張になっている. よって, $s \neq 1$ に対して, Riemann ゼータ関数と Hurwitz ゼータ関数をそれぞれ,

$$\zeta(s) := \frac{1}{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{s-1}}\binom{n-1}{k-1}$$
$$\zeta(s;x) := \frac{1}{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}}{(k+x)^{s-1}}\binom{n-1}{k}$$

と再び定義する. 定義より, $\zeta(s) = \zeta(s;1)$ が成り立つ.

Theorem 10.6. 自然数 r に対し,

$$\zeta(1-r;x) = -\frac{B_r(x)}{r}.$$

Proof. Hasse の級数表示より,

$$\zeta(1-r;x) = -\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(x+k)^r.$$

ここで, Theorem 4.17 より,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}(x+k)^r = B_r(x)$$

であるから定理を得る. □

$x = 1$ として, 以下を得る.

Corollary 10.7. 自然数 r に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\zeta(1-r) = (-1)^{r-1}\frac{B_r}{r}.$$

特に, 自然数 n に対し, $r=2n+1$ として,

$$\zeta(-2n)=0$$

が成り立つ.

Example 10.8. $r=2$ として,

$$\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$$

を得る. これは

$$1+2+3+\cdots=-\frac{1}{12}$$

として表されることがある. ただし, 左辺は発散級数なので, 厳密には等号ではないことに注意する必要がある.

Example 10.9. $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$ を用いて, $\cot x$ のべき級数展開を書き直すと,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\zeta(2n)x^{2n}=-\frac{\pi x}{2}\cot \pi x$$

が得られる.

$\cot x$ という, 指数関数から定義される関数のべき級数展開の係数にリーマンゼータ値が現れるというのは非常に興味深いことだと思う.

Definition 10.10. Theorem 10.4 より,

$$\zeta(1-s;x)=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}(x+k)^{s}.$$

これを s について Laurant 級数展開して,

$$\zeta(1-s;x)=-\frac{1}{s}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n(x)}{n!}s^n$$

となるような x の関数

$$\gamma_r(x):=\frac{1}{r+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}\ln^{r+1}(x+k)$$

を定義する. これを一般 Stieltjes 定数といい. 特に $\gamma_r:=\gamma_r(1)$ を Stieltjes 定数という.

関数論によれば, $\zeta(1-s;x)+\frac{1}{s}$ は複素平面全域での正則関数を定めるので,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n(x)}{n!}s^n$$

の収束半径は ∞ になるのであるが, それを直接示すことは容易ではないと思われるので, ここでは仮定することにする.

Theorem 10.11. 以下の等式が成り立つ.

$$\gamma_r(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln^r(k+x)}{k+x}-\frac{\ln^{r+1}(n+x)}{r+1}\right).$$

Proof. まず, 極限が収束することを示す. Landau の記号は全て $n\to\infty$ におけるものとして,

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln^{r+1}(n+x)-\ln^{r+1}x}{r+1}\\
&=\frac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{n-1}(\ln^{r+1}(k+x+1)-\ln^{r+1}(k+x))\\
&=\frac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\ln(k+x)+\frac{1}{k+x}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^{r+1}-\ln^{r+1}(k+x)\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\ln^r(k+x)}{k+x}+O\left(\frac{\ln^r(k+x)}{(k+x)^2}\right)\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln^r(k+x)}{k+x}+O(1).
\end{aligned}$$

よって,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln^r(k+x)}{k+x}-\frac{\ln^{r+1}(n+x)}{r+1}=O(1)$$

であるから, ここで $n\to\infty$ とすればよい. 次に, 与えられた等式を証明する. $s<0$ とする.

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln^r(k+x)}{k+x}-\frac{\ln^{r+1}(n+x)}{r+1}\right)\frac{s^r}{r!}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+x)^{s-1}-\frac{(n+x)^s-1}{s}.$$

ここで, $n\to\infty$ として, べき級数の一様収束性により,

$$\sum_{r=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln^r(k+x)}{k+x}-\frac{\ln^{r+1}(n+x)}{r+1}\right)\frac{s^r}{r!}=\zeta(1-s;x)+\frac{1}{s}$$

であるから, 両辺の s^r の係数を比較して定理を得る. $\square$

これにより, $\gamma_0 = \gamma$ であることが分かるので, 定義式に代入して,

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln k$$

を得る. これを指数関数に代入して積の形にすると,

$$e^{\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} k^{(-1)^k \binom{n-1}{k-1}} \right)^{1/n}$$

が得られる. 具体的に書き下すと,

$$e^{\gamma} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1/2} \left(\frac{2^2}{1 \cdot 3}\right)^{1/3} \left(\frac{2^3 \cdot 4}{1 \cdot 3^3}\right)^{1/4} \left(\frac{2^4 \cdot 4^4}{1 \cdot 3^6 \cdot 5}\right)^{1/5} \cdots$$

のようになる.

Corollary 10.12. 以下の等式が成り立つ.

$$\gamma_r(x) = \gamma_r + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\ln^r(n+x)}{n+x} - \frac{\ln^r(n+1)}{n+1} \right).$$

特に, $\gamma_0(x) = -\psi(x)$.

Proof. Theorem 10.11 を用いて, 以下の計算により得られる.

$$\begin{aligned}
&\gamma_r(x) - \gamma_r \\
&= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\ln^r(n+x)}{n+x} - \frac{\ln^r(n+1)}{n+1} \right) - \frac{\ln^{r+1}(n+x) - \ln^{r+1}(n+1)}{r+1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\ln^r(n+x)}{n+x} - \frac{\ln^r(n+1)}{n+1} \right).
\end{aligned}$$

$\square$

一般 Stieltjes 定数の定義に $\gamma_0(x) = -\psi(x)$ を代入して,

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \ln(x+k)$$

を得る.

10.2　多重対数関数

Definition 10.13. 複素数 s, α と $|x| \leq 1$ に対し,

$$\mathrm{Li}_s(x;\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\alpha}}{(n+\alpha)^s}$$

と定義し, 多重対数関数を $\mathrm{Li}_s(x) := \mathrm{Li}_s(x;1)$ とする.

定義から, 非負整数 n に対し, Eulerian 多項式 $A_n(x)$ を用いて,

$$\mathrm{Li}_{-n}(x) = \frac{xA_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

と表されることが分かる. また, 特別な場合として Hurwitz ゼータ関数を含む.

$$\zeta(s;\alpha) = \mathrm{Li}_s(1;\alpha).$$

以下の級数表示は Hasse の級数表示に似ているが, 絶対収束性のため, 証明は非常に簡単になっている点で興味深い.

Theorem 10.14. $|x| < 1, \mathrm{Re}(x) < \frac{1}{2}$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\mathrm{Li}_s(x;\alpha) = \frac{x^\alpha}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+\alpha)^s} \binom{n}{k}.$$

Proof. 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+\alpha)^s} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\alpha)^s} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\alpha)^s} \left(\frac{x}{x-1}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\alpha)^s} \left(\frac{x}{x-1}\right)^k \left(\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}\right)^k \\
&= (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+\alpha)^s}.
\end{aligned}$$

□

特に $\alpha = 1$ として, 以下を得る.

Corollary 10.15. $|x| < 1, \mathrm{Re}(x) < \frac{1}{2}$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\mathrm{Li}_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^s} \binom{n-1}{k-1}.$$

さらに, $x \to -1$ として, Riemann ゼータ関数に関する以下の表示を得る.

Corollary 10.16. $\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき,

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} \binom{n-1}{k-1}$$

が成り立つ.

Proof.

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_s(-1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= -(1 - 2^{1-s})\zeta(s)\end{aligned}$$

であることから前の系より従う. □

この級数表示が $\mathrm{Re}(s) \leq 1$ に対しても成り立つかどうかは解析接続を考慮しなければ明らかではない.

10.3 Dirichlet 級数

Definition 10.17. 数列 $(a_1, a_2, \dots)$ に対し,

$$f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

の形の級数を Dirichlet 級数という. s を形式的変数と見なして, 収束性を考慮しないとき, 形式的 Dirichlet 級数という.

$\zeta(s)$ は最も基本的な Dirichlet 級数の例である. 任意の Dirichlet 級数に対し, 収束軸 σ が存在して, $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ のときは収束, $\mathrm{Re}(s) < \sigma$ のときは発散することが定義より分かる. 常に収束するときは $\sigma = -\infty$, 常に発散するときは $\sigma = \infty$ とする.

Proposition 10.18 (Dirichlet 積)**.** 2 つの形式的 Dirichlet 級数

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$
$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

に対し,

$$f(s)g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} a_d b_{n/d}}{n^s}$$

が成り立つ. ただし, $\sum_{d|n}$ は n の正の約数 d 全体を足し合わせるものとする. 複素数 s に対しても, これらの Dirichlet 級数が収束するとき, 等式が成り立つ.

Proof. 以下の計算により示される.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m^s} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^s} \sum_{0<n,m,nm=r} a_n b_m$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|r} a_d b_{r/d}}{r^s}.$$

□

Proposition 10.19 (一意性)**.** 2 つの Dirichlet 級数 $f(s), g(s)$ は実部が ∞ に発散する列 s_n に対し,

$$f(s_n) = g(s_n)$$

が成り立つならば, $f(s) = g(s)$ である.

Proof. 差を考えて, $f(s_n) = 0$ ならば, $f(s) = 0$ であることを示せばよい. 背理法により示す. $f(s) \neq 0$ とし, Dirichlet 級数の最初の 0 でない項を $a_r r^{-s}$ を移項すると,

$$\frac{a_n}{n^s} = O((n+1)^{-s}), \quad (s \to \infty)$$

となるが, これは矛盾である. □

Definition 10.20. 定義域が正整数の複素数値関数を数論的関数という. 数論的関数 a が乗法的関数であるとは, 互いに素な n, m に対し,

$$a(nm) = a(n)a(m)$$

が成り立つことをいい, 完全乗法的関数とは, 任意の自然数 n, m に対し上の等式が成り立つことをいう. 同様に, 加法的関数であるとは, 互いに素な n, m に対し,

$$a(nm) = a(n) + a(m)$$

が成り立つことをいい, 完全加法的関数とは, 任意の自然数 n, m に対し上の等式が成り立つことをいう. 数論的関数の間に

$$(a * b)(n) = \sum_{d|n} a(d)b\left(\frac{n}{d}\right)$$

により, Dirichlet 積を考える.

任意の自然数は素因数分解の一意性より, $n = \prod_p p^{v_p(n)}$ と素因数分解される. ただし, $\prod_p$ は素数 p 全体の積を表し, $v_p(n)$ は n が p^r で割り切れるような r の最大値である. このとき, 相異なる素因数の個数を $\omega(n)$, 重複を含めた素因数の個数を $\Omega(n)$ とする. 定義より, $v_p(n)$ は完全加法的である. 以降, 常に p は素数を表すとする. これにより, 乗法的関数 a と任意の自然数に対し,

$$a(n) = \prod_p a(p^{v_p(n)})$$

が成り立ち, 特に a が完全乗法的であるとき,

$$a(n) = \prod_p a(p)^{v_p(n)}$$

が成り立つ.

Theorem 10.21 (Euler 積)**.** 乗法的関数 a に対し, Dirichlet 級数が絶対収束するとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(p^n)}{p^{ns}}$$

が成り立つ. 特に a が完全乗法的なとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - a(p)p^{-s}}$$

が成り立つ.

Proof. a が乗法的関数であるとき, 素数全体を添字付けして, i の素数を p_i とすると, 素因数分解の一意性より,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s} &= \sum_{0\le e_1,e_2,\dots}\frac{a(p_1^{e_1}p^{e_2}\cdots)}{p_1^{e_1 s}p_2^{e_2 s}\cdots}\\ &= \prod_{i=1}^{\infty}\sum_{0\le e_i}\frac{a(p_i^{e_i})}{p_i^{e_i s}}\\ &= \prod_{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(p^n)}{p^{ns}}\end{aligned}$$

が得られる. 特に a が完全乗法的であるとき,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(p^n)}{p^{ns}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(p)^n}{p^{ns}}\\ &= \frac{1}{1-a(p)p^{-s}}\end{aligned}$$

であるから定理を得る. □

上の証明では, 無限個の項の和が 0 であると扱っているところで少し厳密性に欠けるかもしれない. 厳密な証明は N 以下の素数全体の積を考えてから $N \to \infty$ とすることにより得られる.

$a(n) = 1$ は明らかに完全乗法的関数であるから, 以下が得られる.

Corollary 10.22 (Riemann ゼータ関数の Euler 積表示)**.** Re$(s) > 1$ のとき, 以下の等式が成り立つ.

$$\zeta(s) = \prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

以下, いくつかの数論的関数を定義し, その Dirichlet 級数を求める.

Definition 10.23 (Mobius 関数)**.** Mobius 関数 $\mu(n)$ を n が平方因子を持つときは $\mu(n) := 0$, そうでないとき, 素因数の個数を r として $\mu(n) := (-1)^r$ と定める.

Proposition 10.24. Re$(s) > 1$ のとき, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

Proof. 1 つ目の等式は, 素数全体を添字付けして, i の素数を p_i とすると, $\zeta(s)$ の Euler 積表示を用いて, 以下の計算により得られる.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s} &= \sum_{0\le r, 0<i_1<\cdots<i_r}\frac{(-1)^r}{(p_{i_1}\cdots p_{i_r})^s}\\ &= \prod_p (1-p^{-s})\\ &= \frac{1}{\zeta(s)}.\end{aligned}$$

2 つ目の等式も上と同様に, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s} &= \prod_p (1+p^{-s})\\ &= \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{1-p^{-s}}\\ &= \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.\end{aligned}$$

□

これらの 2 つの式を足し合わせて, 2 で割ることにより, 相異なる素因数の積で, 素因数の個数の個数が奇数個であるものの和を Riemann ゼータ関数で表すことができる.

以下は基本的な公式である.

Theorem 10.25 (Mobius の反転公式)**.** 自然数 n に対し,

$$b(n) = \sum_{d|n} a(d)$$

であるとき,

$$a(n) = \sum_{d|n} b(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Proof. Dirichlet 積より, 形式的 Dirichlet 級数の間の等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s} = \zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$$

が成り立つ. よって, 1 つ前の定理より,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s} &= \frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n} b(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s}\end{aligned}$$

より, 定理が得られる. □

特に $a(n)=\delta_{n,1}$ とすると,

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\delta_{n,1}$$

が得られる.

Definition 10.26 (約数関数)**.** 複素数 r に対し, 約数関数 $\sigma_r(n)$ を,

$$\sigma_r(n) := \sum_{d|n} d^r$$

と定める. また, $d(n) := \sigma_0(n), \sigma(n) := \sigma_1(n)$ とする.

Proposition 10.27. 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_r(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-r).$$

Proof. Dirichlet 積から, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}\zeta(s)\zeta(s-r) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^r}{n^s}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{d|n} d^r}{n^s}.\end{aligned}$$

□

$r=0,1$ として, 特に

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1)$$

が得られる.

Definition 10.28 (Euler の φ 関数)**.** Euler の φ 関数 $\varphi(n)$ を n 以下で, n と互いに素である自然数の個数と定義する.

Proposition 10.29. $\mathrm{Re}(s) > 2$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Proof. 両辺に $\zeta(s)$ を掛けてから, Dirichlet 積を用いたもの

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

を示せばよい. n 以下の自然数 r で, r と n の最小公倍数が $\frac{n}{d}$ であるものの個数は, d 以下で d と互いに素なものの個数 $\varphi(d)$ と等しい. それらを n の約数であるような d について全て足し合わせて,

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

が得られる. □

Theorem 10.30. 以下の等式が成り立つ.

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Proof.

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

に Mobius の反転公式を用いて, 以下の計算により示される.

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \\ &= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).\end{aligned}$$

□

Definition 10.31 (von Mangoldt 関数)**.** von Mangoldt 関数 $\Lambda(n)$ を, n が p べきであるとき, $\Lambda(n) = \ln p$, そうでないとき, $\Lambda(n) = 0$ と定義する.

定義より,

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$$

が成り立つことが分かる.

形式的 Dirichlet 級数 $f(s) := \sum_{0<n} a(n)n^{-s}$ の微分を,

$$f'(s) := -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\ln n}{n^s}$$

により定める.

Theorem 10.32. 完全乗法的関数 $a(n)$ に対し, $f(s) := \sum_{0<n} a(n)n^{-s}$ とする. このとき, 形式的 Dirichlet 級数の間の等式,

$$f'(s) = -f(s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\Lambda(n)}{n^s}$$

が成り立つ.

Proof. Dirichlet 積より,

$$\sum_{d|n} a(d)a\left(\frac{n}{d}\right)\Lambda(d) = a(n)\ln n$$

を示せばよい. von Mangoldt 関数の定義より,

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} a(d)a\left(\frac{n}{d}\right)\Lambda(d) &= \sum_p \sum_{i=1}^{v_p(n)} a(p^i)a\left(\frac{n}{p^i}\right)\ln p \\
&= \sum_p \sum_{i=1}^{v_p(n)} a(n)\ln p \\
&= a(n)\ln\prod_p p^{v_p(n)} \\
&= a(n)\ln n
\end{aligned}$$

であるから, 定理が得られる. □

特に, $a(n) = 1$ として, Dirichlet 級数の収束範囲を考えることにより, 以下を得る.

Corollary 10.33. $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

10.4 素数ゼータ関数

最後に素数の逆数和が発散することを示そうと思う.

Definition 10.34. $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対し, 素数ゼータ関数を以下のように定義する.

$$P(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}.$$

Theorem 10.35. 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\ln\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(ns)}{n}\\ P(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\ln\zeta(ns).\end{aligned}$$

Proof. 最初の式は, Euler 積より,

$$\begin{aligned}\ln\zeta(s) &= -\sum_p \ln(1-p^{-s})\\ &= \sum_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{ns}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(ns)}{n}.\end{aligned}$$

2 つ目の式は, 最初の式を用いて以下のように示される.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}P(ns) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{P(nms)}{m}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(ns)}{n}\sum_{d|n}\mu(n)\\ &= P(s).\end{aligned}$$

□

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\ln\zeta(ns)$$

において, $s \to 1$ とすると以下が得られる.

Corollary 10.36. 素数の逆数和は発散する. つまり,

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

が成り立つ.

参考文献

[1] Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis

[2] Formal power series, Wikipedia

[3] S. Seki, Connectors. arXiv:2006.09076

[4] Slater L.J. Generalized hypergeometric functions Cambridge University Press

[5] Discrete Fourier transform, Wikipedia

[6] J. Okuda, K. Ueno, Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 40(2) (2004), 537–564.

[7] George Gasper, Mizan Rahman, Basic hypergeometric series

[8] Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function